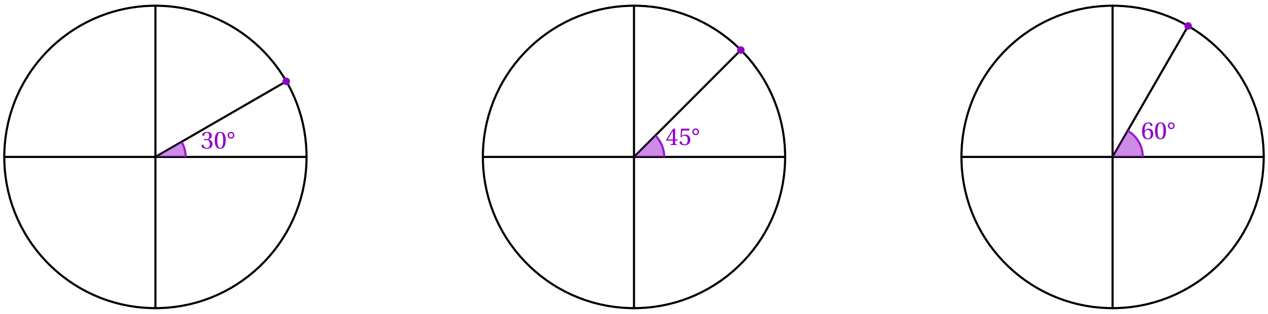
CHAPITRE 8

Trigonométrie

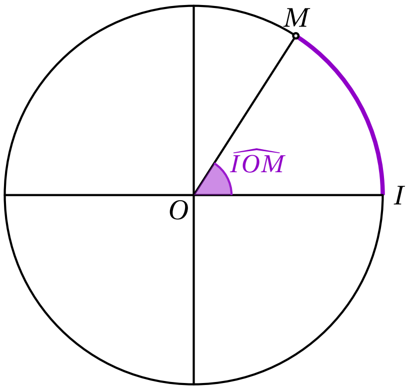
Plan du chapitre

Introduction

Voici des angles mesurant respectivement : 30°, 45°et 60°.



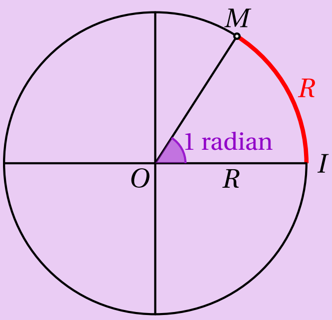
Mais d'où sortent ces valeurs numériques ?
Jusqu'ici pour mesurer un angle nous avons utilisé comme unité de mesure : le degré. Où un angle plein mesure 360°, un angle plat 180°, un angle droit 90°... Mais d'où sortent ces valeurs numériques ? Pourquoi 360 pour un angle plein ?
Ce choix est arbitraire, in nous vient des babyloniens qui ont choisi 360 en autre car ce nombre est divisible par bon nombre premiers entiers (1,2,3,4,5,6,8,9,10,12) et de plus car ils comptaient en base 60.
On pourrait se demander si on ne peut pas mesurer un angle de manière plus naturelle, comme par exemple dire que la mesure d'angle $\widehat{IOM}$, ci-dessous, est la longueur de l'arc de cercle $\widehat{IM}$.



Partie I Une nouvelle mesure d'angle

Définition 1 : Radian

Le **radian** est une unité de mesure d'angles définie de la façon suivante ;
Si l'arc $\widehat{IM}$ d'un cercle de rayon R a pour longueur R, alors l'angle $\widehat{IOM}$ vaut 1 radian.



Dans le cas où on a un cercle de rayon 1, on a alors que la longueur d'arc de cercle coïncide avec la mesure de l'angle au centre. On s'efforcera alors à travailler avec des cercles de rayon 1.

Exemple :

Comme la mesure d'un angle plein est de 360° la mesure en radian de cet angle plein est la longueur du cercle de rayon 1 qui est de .... Ainsi :

$$360° \leftrightarrow \text{...... radians}$$

Information : Proportionnalité

Les mesures en degrés et en radians sont proportionnelles. On a alors le tableau de proportionnalité suivant :

Degrés	360°	180°	90°	60°	45°	30°	......°
Radians	...... rad	...... rad	...... rad	...... rad	...... rad	...... rad	1 rad

× ......

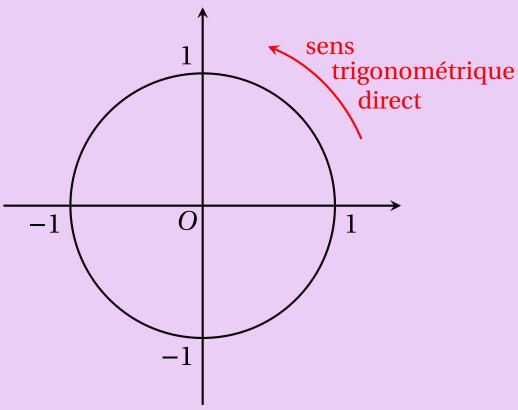
Partie II Cercle trigonométrique

Dans la suite on considéra $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère orthonormal.

A - Définition

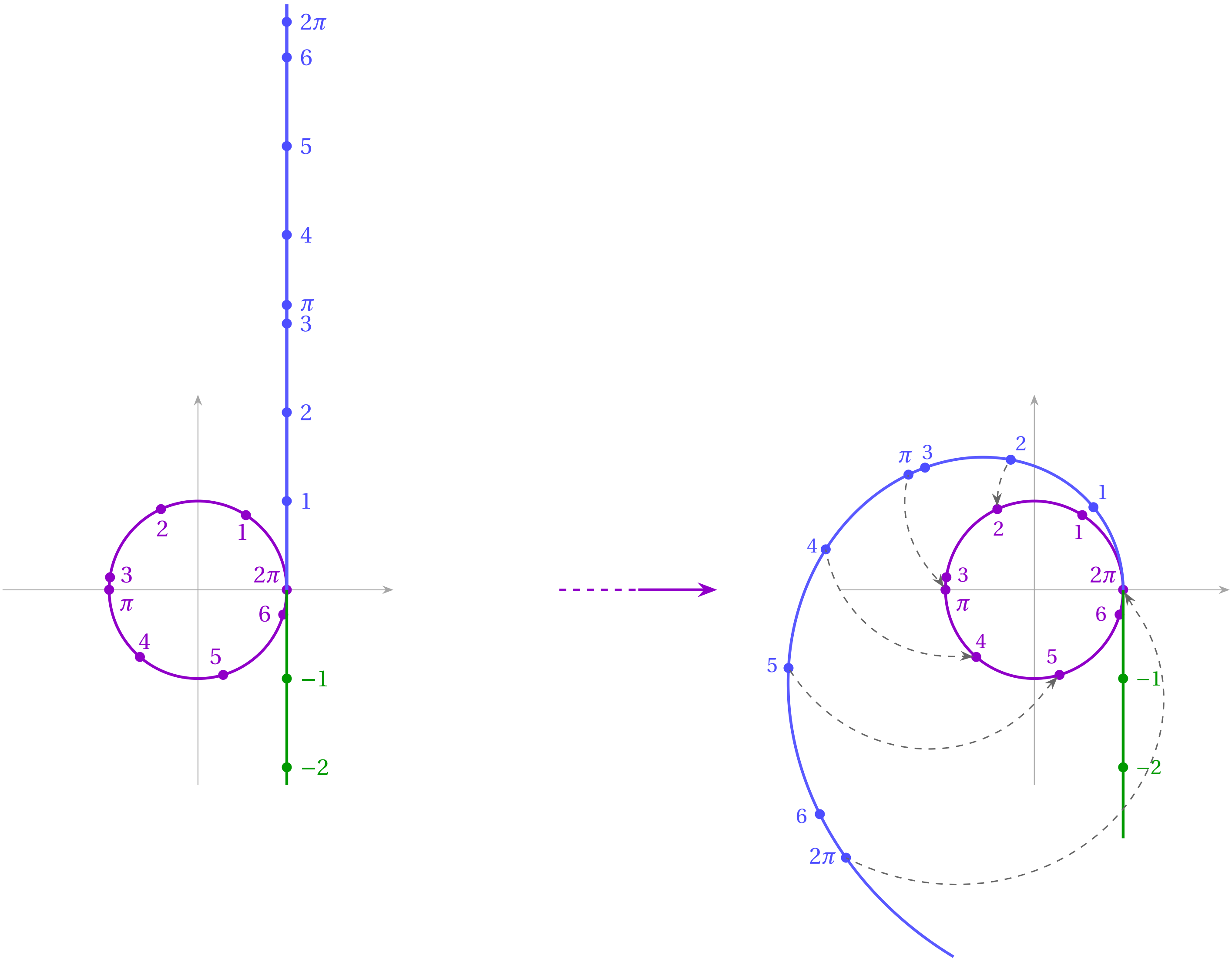
Définition 2 : Cercle trigonométrique

Le cercle de centre O et de rayon A s'appelle le **cercle trigonométrique**.
Le **sens contraire des aiguilles d'un montre** s'appelle le **sens trigonométrique**.



Ainsi orienter, nous allons pouvoir considérer des mesures négatives d'angles. Pour les obtenir on tourne dans le sens non trigonométrique, c'est-à-dire dans le sens des aiguilles d'une montre.
Ainsi l'angle plat peut avoir plusieurs mesures en radian : π rad mais aussi $-\pi$ rad.
Pour éclaircir ce point, cherchons à repérer les réels sur notre cercle trigonométrique.

B - Repérage sur le cercle



Enroulement de la droite réelle autour du cercle trigonométrique

Par le procédé d'enroulement de la droite réelle autour du cercle trigonométrique,

- À tout point de la droite, d'abscisse x, correspond un unique point M du cercle trigonométrique;
- Tout point du cercle trigonométrique est associé à une infinité de point de la droite réelle.

Définition 3 :

Tout point M du cercle trigonométrique est associé par enroulement à un unique réel $\theta \in]-\pi,\pi]$. Tel que l'arc de cercle $\widehat{IM}$ a pour longueur $|\theta|$, donc l'angle $\widehat{IOM}$ a pour mesure θ radians.
On dit que le point M est repéré sur le cercle trigonométrique par le réel θ.
De plus tout réel de la forme $\theta + k(2\pi)$ où $k \in \mathbb{Z}$, repère aussi le point M.

À retenir : L'angle associé à un point n'est pas unique sur $\mathbb{R}$, il est exprimé à 2π près.
Ce que vous pouvez retenir c'est que cela vient du fait qu'à partir d'un point si on rajoute (ou retire) un (ou des) tour(s) complet, dans un sens ou dans l'autre, on retombe sur le point de départ.

Propriété 1 : Congru modulo 2π

Deux mesures en radian d'un même angle diffèrent d'un multiple entier de 2π.
Si θ_1 et θ_2 sont deux mesures d'un même angle alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta_1 - \theta_2 = 2k\pi$, dans ce cas on dira que θ_1 et θ_2 sont **congrus modulo 2π** et on notera : $\theta_1 \equiv \theta_2 [2\pi]$.

Exemple :

Les réels $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{9\pi}{4}$ sont congrus modulo 2π en effet :

$$\frac{9\pi}{4} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

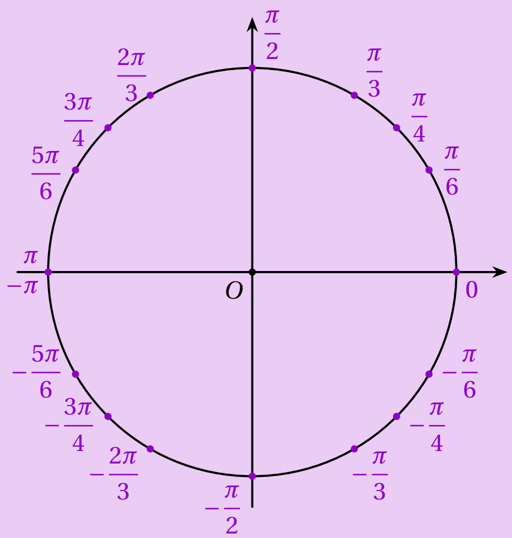
À savoir faire 1 : Congrus ?

Déterminer si les nombres suivants sont congrus modulo 2π :

1. $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{13\pi}{6}$?
   ....
   ....
2. $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{4}$?
   ....
   ....
3. $\frac{9\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$?
   ....
   ....
4. $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{7\pi}{2}$?
   ....
   ....
5. $-\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$?
   ....
   ....
6. $-\frac{17\pi}{6}$ et $-\frac{5\pi}{6}$?
   ....
   ....
7. $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{11\pi}{3}$?
   ....
   ....
8. $\frac{3\pi}{4}$ et $-\frac{21\pi}{4}$?
   ....
   ....

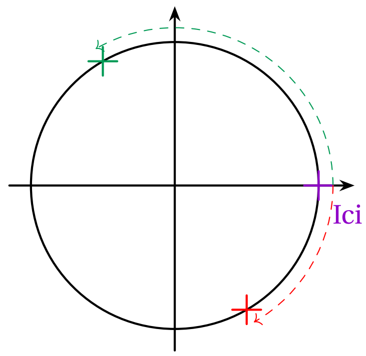
Définition 4 : Mesure principale

La **mesure principale** en radian d'un angle est l'unique mesure appartenant à $]-\pi, \pi]$.



Mesures principales remarquables

À retenir : Pourquoi l'intervalle $]-\pi,\pi]$?
L'idée c'est de partir de la partie droite de l'axe des abscisses sur le cercle trigonométrique :



et de réaliser le chemin le plus court vers le point souhaité.

À savoir faire 2 : Mesure principale

Donner la mesure principale de chacun des nombres suivants :

1. $\dfrac{11\pi}{2} =$ ....
2. $2\pi =$ ....
3. $-\pi =$ ....
4. $-\dfrac{25\pi}{5} =$ ....
5. $\dfrac{19\pi}{6} =$ ....
6. $-\dfrac{5\pi}{4} =$ ....
7. $-\dfrac{41\pi}{6} =$ ....
8. $19\pi =$ ....

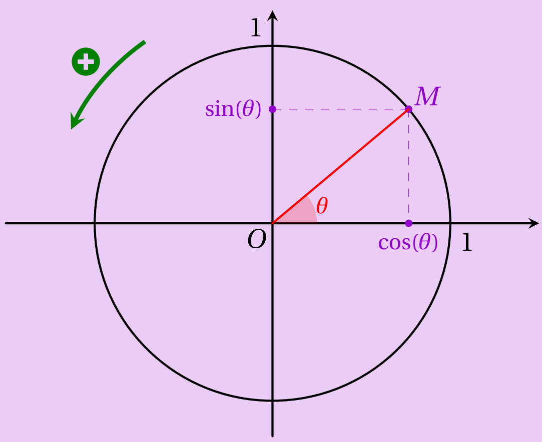
Partie III Cosinus et sinus

Dans cette partie, on considère M un point sur le cercle trigonométrique, et θ une mesure en radian de l'angle $\widehat{IOM}$.

A - Définition

Définition 5 : Cosinus et sinus

L'abscisse du point M est le **cosinus** de l'angle θ, $\cos\theta$ et l'ordonné du point M est le **sinus** de l'angle θ, $\sin\theta$.



Exemple :

En lisant les coordonnées des points associés aux angles : 0, $\dfrac{\pi}{2}$, $-\dfrac{\pi}{2}$ et π on a :

- $\begin{cases} \cos 0 = ... \\ \sin 0 = ... \end{cases}$;
- $\begin{cases} \cos \dfrac{\pi}{2} = ... \\ \sin \dfrac{\pi}{2} = ... \end{cases}$;
- $\begin{cases} \cos \left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = ... \\ \sin \left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = ... \end{cases}$;
- $\begin{cases} \cos \pi = ... \\ \sin \pi = ... \end{cases}$.

Donnons un tableau de valeurs pour les angles remarquables (dans le premier quadrant) :

θ	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$
$\cos\theta$	.....	.....	.....	.....	.....
$\sin\theta$	.....	.....	.....	.....	.....

À retenir : Moyen mnémotechnique

Pour retenir ce tableau :

θ	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$
$\cos\theta$	$\dfrac{\sqrt{....}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{....}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{....}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{....}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{....}}{2}$
$\sin\theta$	$\dfrac{\sqrt{....}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{....}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{....}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{....}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{....}}{2}$

B - Propriétés

Propriété 2 : Périodique

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a :

- $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ (où $\cos^2\theta = \cos(\theta)^2$ de même pour le sinus) ;
- $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ et $-1 \leq \sin\theta \leq 1$.

Démonstration :

Considérons M un point du cercle trigonométrique, tel que $\widehat{IOM} = \theta$ rad on a alors $M(\cos\theta, \sin\theta)$, on a alors $\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = 1$.

- Comme $\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = 1$ on a alors : $\left\|\overrightarrow{OM}\right\|^2 = 1$, c'est-à-dire : $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$;
- Comme abscisse d'un point du cercle trigonométrique on a que $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ sinon :

$$\left\|\overrightarrow{OM}\right\|^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta > 1 \quad \text{car } \sin^2\theta \geq 0$$

De la même manière on démontre que $-1 \leq \sin\theta \leq 1$.

■

Propriété 3 :

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$ on a :

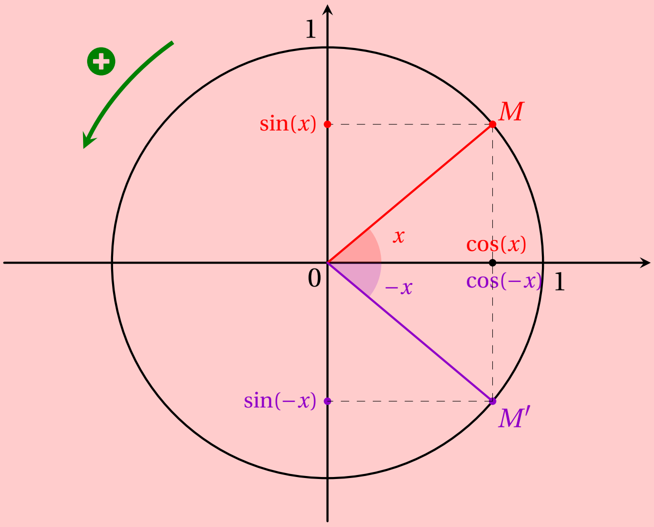
- $\cos(\theta + 2k\pi) = \cos\theta$
- $\sin(\theta + 2k\pi) = \sin\theta$

***Démonstration* :**

Propriété 4 : Parité

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

- $\cos(-\theta) = \cos\theta$
- $\sin(-\theta) = -\sin\theta$

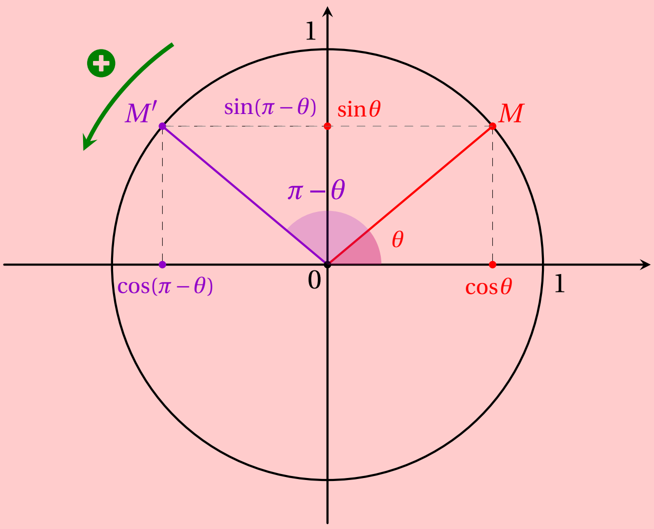


***Démonstration* :**

Propriété 5 :

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

- $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$
- $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$

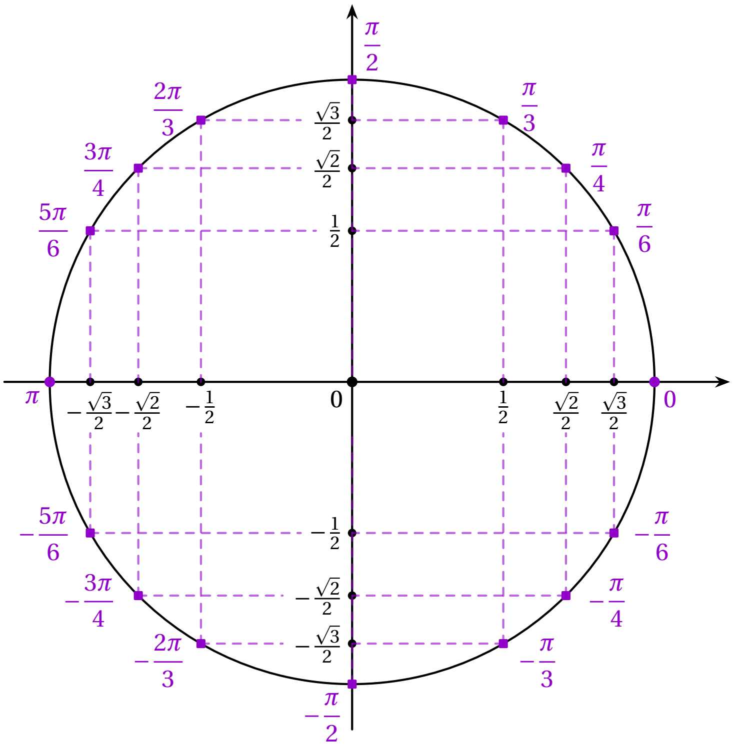


Démonstration **:**

À savoir faire 3 : Bilan

Calculer les nombres suivants :

1. $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
2. $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
3. $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
4. $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
5. $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
6. $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
7. $\cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$



Bilan des informations du cercle trigonométrique à connaître

Partie IV Équations et inéquations

A - Équations trigonométriques

Dans cette partie on va résoudre les équations de la forme :

$$\cos x = a \quad \text{et} \quad \sin x = b$$

Propriété 6 :

Si $a, b \notin [-1, 1]$ alors les équations :

$$\cos x = a \quad \text{et} \quad \sin x = b$$

ne possède pas de solution réelle.

Démonstration :

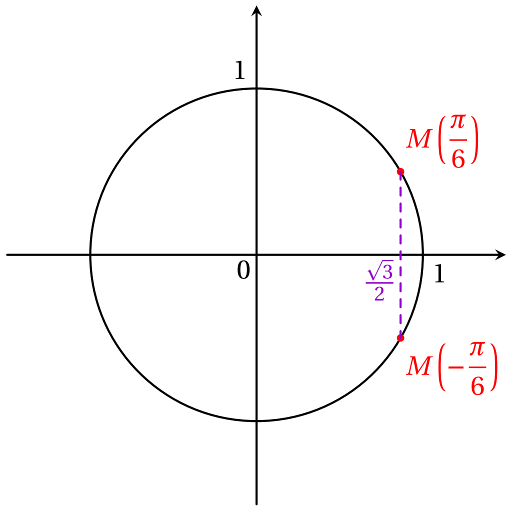
Évidemment, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$. ■

Exemple :

Résolvons $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

On cherche des $x \in \mathbb{R}$ tel que $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ pour cela :

- On va tracer la droite d'équation $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;
- Puis on va repérer les points d'intersection avec le cercle trigonométrique.



On sait qu'on peut repérer $\dfrac{\pi}{6}$ mais également $-\dfrac{\pi}{6}$ car $\cos x = \cos(-x)$, de plus on sait que tout réel de la forme $\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ sont représentés sur le cercle trigonométrique par le même point (celui représentant $\dfrac{\pi}{6}$) donc ils ont tous la même abscisses égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Ainsi tous les $\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ sont solutions de l'équation $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

De la même manière on peut affirmer que tous les $-\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ sont solutions de l'équation $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Ainsi :

$$S = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ /\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Si on demande de résoudre cette équation sur $[0, 2\pi]$, il faudra resteindre l'ensemble de solution à $[0, 2\pi]$, donc ici déterminer les $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi \in [0, 2\pi]$$

Ici on aura alors :

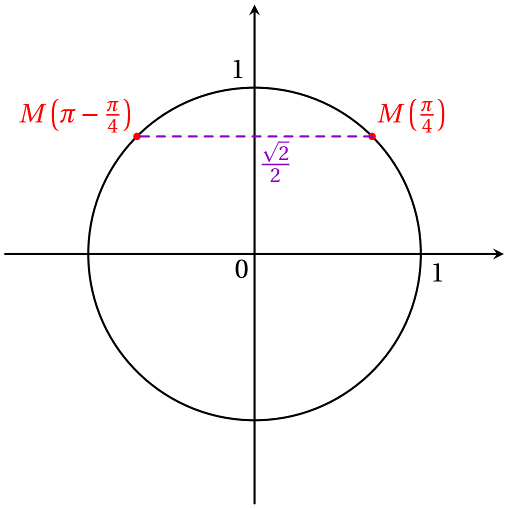
$$S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$$

Exemple :

Résolvons $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

On cherche des $x \in \mathbb{R}$ tel que $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ pour cela :

- On va tracer la droite d'équation $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;
- Puis on va repérer les points d'intersection avec le cercle trigonométrique.



On sait qu'on peut repérer $\dfrac{\pi}{4}$ mais également $\dfrac{3\pi}{4}$ car $\sin x = \sin(\pi - x)$.
De la manière que l'exemple précédent on sait que $\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ et $\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ sont représentés sur le cercle trigonométrique respectivement par $\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{3\pi}{4}$.
Ainsi :

$$S = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \ \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Si on demande de résoudre cette équation sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, il faudra resteindre l'ensemble de solution à $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, donc ici déterminer les $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \ \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Ici on aura alors :

$$S = \left\{ \frac{\pi}{4} \right\}$$

Théorème 1 : Équations trigonométriques

Soient $\theta, \phi \in \mathbb{R}$, nous avons les équivalences suivantes :

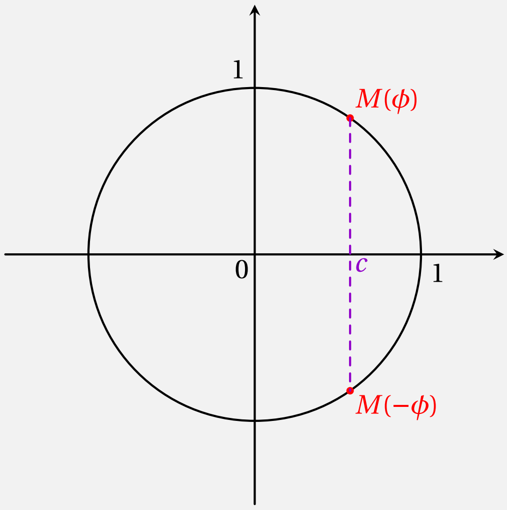
- $\cos\theta = \cos\phi \Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\theta = \phi + 2k\pi$ **ou** $\theta = -\phi + 2k\pi$;
- $\sin\theta = \sin\phi \Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\theta = \phi + 2k\pi$ **ou** $\theta = \pi - \phi + 2k\pi$.

Méthode 1 : Résolution équations trigonométriques

Pour résoudre une équation trigonométrique de la forme : $\cos x = c$ ou $\sin x = s$.

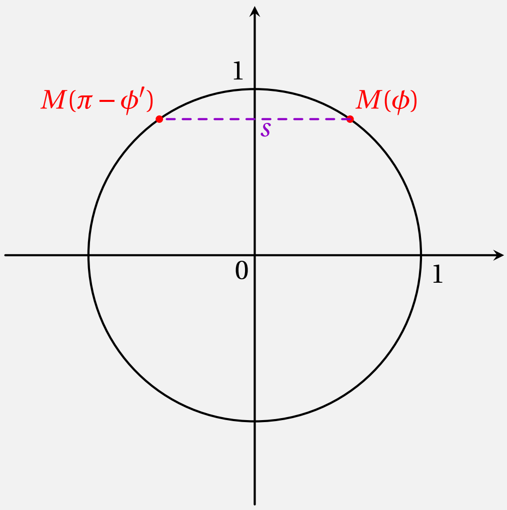
- Si $c \notin [-1,1]$ ou $s \notin [-1,1]$ nos équations ne possèdent aucune solution réelle;
- Si $c \in [-1,1]$ ou $s \in [-1,1]$:
  - ▶ On cherche à exprimer c sous la forme d'un cosinus : $\cos\phi$;
  - ▶ On cherche à exprimer s sous la forme d'un sinus : $\sin\phi'$;
- On obtient alors :
  - ▶ $\cos x = \cos\phi$ on a alors :

$$S = \{\phi + 2k\pi,\ -\phi + 2k\pi\ /\ k \in \mathbb{Z}\}$$



  - ▶ $\sin x = \sin\phi'$ on a alors :

$$S = \{\phi + 2k\pi,\ \pi - \phi + 2k\pi\ /\ k \in \mathbb{Z}\}$$



À savoir faire 4 : Résolution

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ puis $[-\pi, \pi]$ l'équation : $\cos x = \dfrac{1}{2}$.

   ....

   ....

   ....

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ puis $[0,\pi]$ l'équation : $\sin x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

B - Inéquations trigonométriques

Dans cette partie on va résoudre **graphiquement** les inéquations de la forme :

$$\cos x \leq a,\ \cos x \geq a \quad \text{ou} \quad \sin x \leq b,\ \sin x \geq b$$

Propriété 7 :

Les seules inéquations trigonométriques ayant des solutions sont les inéquations de la forme :

$$\begin{cases} \cos x \leq a \\ \cos x \geq a \end{cases} \quad \text{et} \begin{cases} \sin x \leq b \\ \sin x \geq b \end{cases}$$

avec $a, b \in [-1, 1]$.

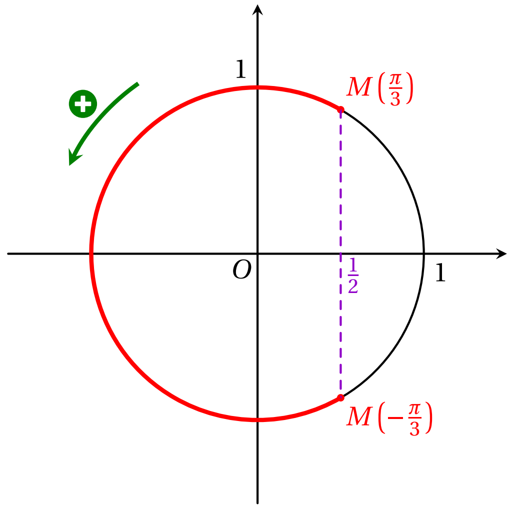
***Démonstration* :**

Évidemment car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$ ■

Exemple :

Résolvons sur $]-\pi,\pi]$ l'inéquation : $\cos x \leq \dfrac{1}{2}$:

On commence par tracer la droite d'équation : $x = \dfrac{1}{2}$



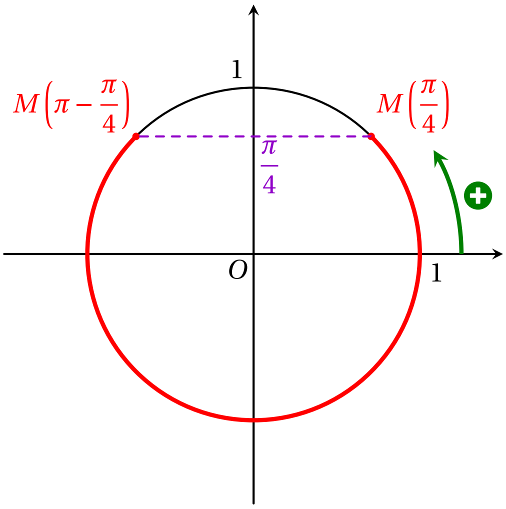
Puis on repère les points du cercle trigonométrique situé à gauche de cette droite.
En tournant dans le sens trigonométrique et en notant les solutions à partir de $-\pi$ nous lisons l'ensemble de solution de cette inéquation :

$$S = \left]-\pi, -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$$

Exemple :

Résolvons sur $[0, 2\pi]$ l'inéquation : $\sin x \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$:

On commence par tracer la droite d'équation : $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$



Puis on repère les points du cercle trigonométrique situé sous cette droite.
En tournant dans le sens trigonométrique et en notant les solutions sur le premier tour de cercle nous lisons l'ensemble de solution de cette inéquation :

$$S = \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, 2\pi\right]$$

À savoir faire 5 : Résolution graphique d'inéquation

1. Résoudre graphiquement l'inéquation : $\cos x \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

....
....
....
....
....
....
....
....

2. Résoudre graphiquement l'inéquation : $\sin x \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

....
....
....
....
....
....
....
....

Partie V Fonctions trigonométriques

A - La fonction cosinus

Nous définissons la fonction suivante :

$$\cos : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos x \end{array}$$

Propriété 8 : Propriétés de la fonction cosinus

- La fonction cosinus est **majorée par 1 et minorée par -1**, c'est-à-dire :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \quad -1 \leq \cos x \leq 1$$

- La fonction cosinus est **paire** sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \quad \cos(-x) = \cos x$$

- La fonction cosinus est **2π-périodique**, c'est-à-dire :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x$$

- La fonction cosinus est **dérivable** sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est :

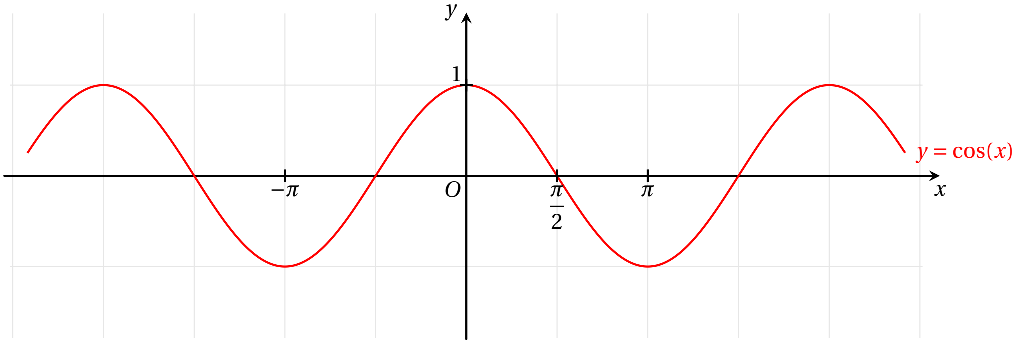
$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \quad \cos'(x) = -\sin x$$

- La fonction cosinus est strictement croissante sur $[-\pi, 0]$ et strictement décroissante sur $[0, \pi]$.

***Démonstration* :**

- Il est clair que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $-1 \leq \cos\theta \leq 1$, d'où la fonction cosinus est majorée par 1 et minorée par -1 ;
- Il est clair que la fonction cosinus est paire sur $\mathbb{R}$ car nous avons déjà prouvé que : pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ $\cos(-\theta) = \cos\theta$;
- Il est clair que la fonction cosinus est 2π-périodique car nous avons déjà prouvé que : pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ $\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$;
- On admettra que la dérivée de la fonction cosinus est $-\sin$.
- On sait que pour tout $x \in [0,\pi]$: $\sin x > 0$ donc la fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0,\pi]$ car $\cos' x = -\sin x$. Et pour tout $x \in [-\pi, 0]$: $\sin x < 0$ donc la fonction cosinus est strictement croissante sur $[0,\pi]$

■



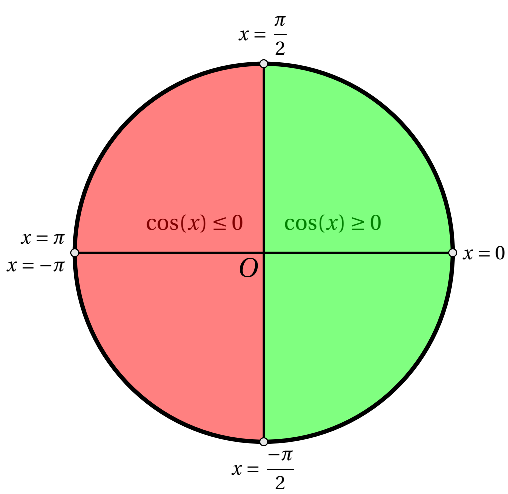
Graphe de la fonction cosinus

Propriété 9 : Signe de la fonction cosinus

Pour $x \in [-\pi, \pi]$ on a :

$$\begin{cases} \cos x < 0 \text{ pour } -\pi \leq x < \dfrac{\pi}{2} \\ \cos x > 0 \text{ pour } -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2} \\ \cos x < 0 \text{ pour } \dfrac{\pi}{2} < x \leq \pi \\ \cos x = 0 \text{ pour } x = \pm\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

À retenir : On retiendra la figure suivante pour le signe de la fonction cosinus :



Signe de la fonction cosinus

B - La fonction sinus

Nous définissons la fonction suivante :

$$\begin{array}{rccl} \sin : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sin x \end{array}$$

Propriété 10 : Propriétés de la fonction sinus

- La fonction sinus est **majorée par 1 et minorée par -1**, c'est-à-dire :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \ -1 \leq \sin x \leq 1$$

- La fonction sinus est **impaire** sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \ \sin(-x) = \sin x$$

- La fonction sinus est **2π-périodique**, c'est-à-dire :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \ \sin(x + 2\pi) = \sin x$$

- La fonction sinus est **dérivable** sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est :

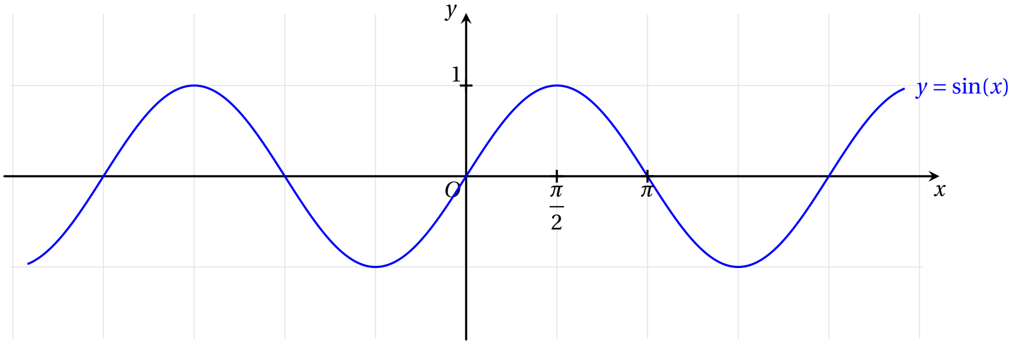
$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \ \sin'(x) = \cos x$$

- La fonction sinus est strictement décroissante sur $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

***Démonstration* :**

- Il est clair que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $-1 \leq \sin\theta \leq 1$, d'où la fonction sinus est majorée par 1 et minorée par -1 ;
- Il est clair que la fonction sinus est impaire sur $\mathbb{R}$ car nous avons déjà prouvé que : pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ $\sin(-\theta) = \sin\theta$;
- Il est clair que la fonction sin est 2π-périodique car nous avons déjà prouvé que : pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ $\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta$;
- On admettra que la dérivée de la fonction sinus est la fonction cosinus .
- On sait que pour tout $x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$: $\cos x < 0$ donc la fonction sinus est strictement décroissante sur $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ car $\cos' x = \sin x$. Et pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$: $\cos x > 0$ donc la fonction sinus est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

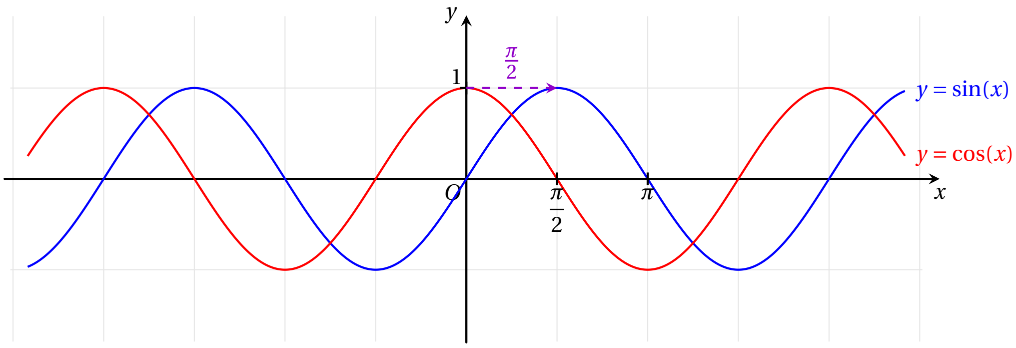
■



Graphe de la fonction sinus

Propriété 11 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos x$.

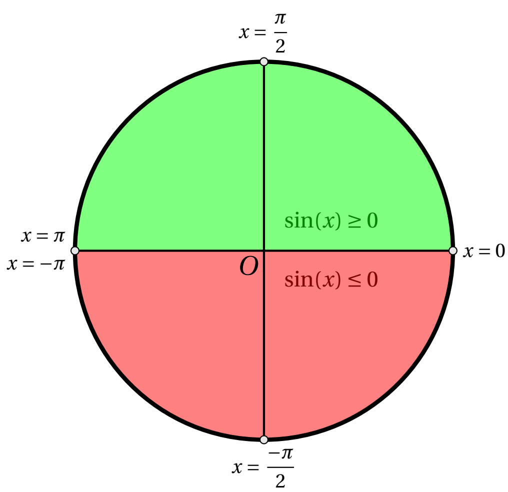


Propriété 12 : Signe de la fonction cosinus

Pour $x \in [-\pi, \pi]$ on a :

$$\begin{cases} \sin x < 0 \text{ pour } -\pi < x < 0 \\ \sin x > 0 \text{ pour } 0 < x < \pi \\ \sin x = 0 \text{ pour } x = 0 \text{ ou } \pi \end{cases}$$

À retenir : On retiendra la figure suivante pour le signe de la fonction sinus :



Signe de la fonction sinus

Propriété 13 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$,
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$,
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$.

C - Bonus : La fonction tangente

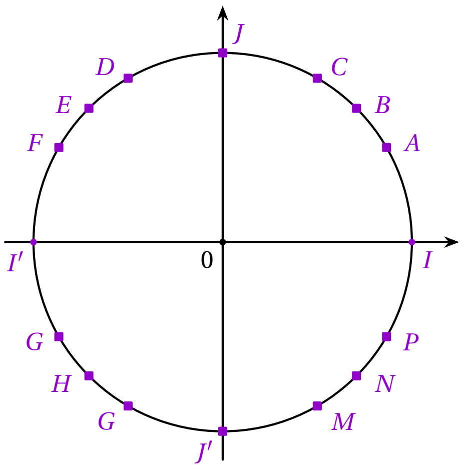
Partie VI Exercices

A - Cercle trigonométrique

★⯪☆☆☆ **EXERCICE 1** (Repérage) ....

On se place sur le cercle trigonométrique tracé ci-dessus et sur lequel sont placés des points.
Déterminer les points images, par l'enroulement de la droite réelles sur le cercle trigonométrique, des réels suivants :

1. π
2. 2π
3. -3π
4. 18π
5. $\dfrac{\pi}{2}$
6. $\dfrac{3\pi}{2}$
7. $\dfrac{17\pi}{2}$
8. $-\dfrac{7\pi}{2}$
9. $\dfrac{\pi}{6}$
10. $\dfrac{3\pi}{4}$
11. $-\dfrac{5\pi}{3}$
12. $\dfrac{8\pi}{3}$
13. $-\dfrac{7\pi}{4}$
14. $\dfrac{19\pi}{3}$
15. $-\dfrac{37\pi}{6}$
16. $\dfrac{23\pi}{4}$
17. $-\dfrac{15\pi}{4}$
18. 2026π
19. $-\dfrac{34\pi}{3}$
20. $-\dfrac{571\pi}{4}$



★★⯪☆☆ **EXERCICE 2** (Mesure principale) ....

Donner la mesure principale pour chaque réel ci-dessous

1. 29π
2. $912\,459\pi$
3. $\dfrac{14\pi}{3}$
4. $\dfrac{23\pi}{2}$
5. $-\dfrac{35\pi}{3}$
6. $\dfrac{23\pi}{4}$
7. $-\dfrac{37\pi}{3}$
8. $\dfrac{181\pi}{4}$
9. $\dfrac{234\pi}{5}$
10. $\dfrac{2021\pi}{6}$
11. $-\dfrac{8\,956\pi}{11}$
12. $\dfrac{273\pi}{7}$
13. $\dfrac{8\,764\pi}{13}$
14. $\dfrac{5\,423\pi}{7}$
15. $-\dfrac{9\,876\pi}{5}$

B - Cosinus et sinus d'un angle

★★☆☆☆ **EXERCICE 3** ( ) ....

Compléter les tableaux suivants, en donnant les valeurs exactes :

θ	$\dfrac{2\pi}{3}$	$\dfrac{3\pi}{4}$	$\dfrac{5\pi}{6}$	π	$\dfrac{7\pi}{6}$	$\dfrac{5\pi}{4}$
$\cos\theta$						
$\sin\theta$						

θ	$\dfrac{3\pi}{2}$	$\dfrac{9\pi}{4}$	-3π	$-\dfrac{13\pi}{6}$	$\dfrac{17\pi}{2}$	$-\dfrac{8\pi}{3}$
$\cos\theta$						
$\sin\theta$						

★★⯪☆☆ **EXERCICE 4** ( ) ....

Calculer :

1. $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)+\sin\pi$
2. $\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)-\sin\left(-\dfrac{7\pi}{4}\right)$
3. $\cos\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)-\sin(2\pi)+\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$
4. $\cos(2026\pi)-\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)\right)-\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$
5. $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)$
6. $\cos^2\left(-\dfrac{\pi}{13}\right)+\sin^2\left(\dfrac{-\pi}{13}\right)$
7. $\cos^2\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)-\sin^2\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$
8. $\sin\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)-\cos(-\pi)$
9. $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}$

★★☆☆☆ **EXERCICE 5** ....

Dans chaque cas, déterminer la mesure de l'angle θ, en radian, dans l'intervalle $[0,2\pi[$, puis dans l'intervalle $]\pi,\pi]$.

1. $\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ et $\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta=-\dfrac{1}{2}$
3. $\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
4. $\cos\theta=-1$ et $\sin\theta=0$

C - Équations trigonométrique

★★★☆☆ **EXERCICE 6** ....

Résoudre les équations suivantes :

1. $2\sin x-1=0$ sur $\mathbb{R}$;
2. $4\cos x-2=0$ sur $\mathbb{R}$;
3. $\sin(2x)=\dfrac{1}{2}$ sur $[0,2\pi[$;
4. $\cos(3x)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sur $[0,2\pi[$;
5. $\cos(5x)=-1$ sur $]-\pi,\pi]$;
6. $\sin(7x)=-1$ sur $]-\pi,\pi]$;
7. $\cos(3x+1)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sur $\mathbb{R}$;
8. $\sin\left(x^2\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sur $\mathbb{R}$.

★★★★☆ **EXERCICE 7** ....

Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $2\cos^2 x-3\cos x+1=0$
2. $\sin^2-\left(3+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\sin x+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}=0$

D - Inéquations trigonométrique

★★⯪☆☆ **EXERCICE 8** ....

Résoudre dans $]-\pi,\pi]$ les inéquations suivantes :

1. $1-2\sin x > 0$;
2. $1+2\cos x > 0$;
3. $\sin x \cos x \geq 0$;
4. $2\cos x+\sqrt{3} < 0$.

★★★☆☆ **EXERCICE 9** ....

À l'aide du cercle trigonométrique répondre aux questions suivantes :

1. Donner les valeurs possibles de $x \in]-\pi,\pi]$ telles que $\cos x \in [0,1]$ et $\sin x \in [-1,0]$;
2. Donner les valeurs possibles de $x \in]-\pi,\pi]$ telles que $\cos x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ et $\sin x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$;
3. Donner les valeurs possibles de $x \in [0,2\pi[$ telles que $\cos x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right]$ et $\sin x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$;
4. Donner les valeurs possibles de $x \in [0,2\pi]$ telles que $\cos x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ et $\sin x \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right]$;
5. Donner les valeurs possibles de $x \in]-7\pi,-6\pi]$ telles que $\cos x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ et $\sin x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$;
6. Donner les valeurs possibles de $x \in]-7\pi,-6\pi]$ telles que $\cos x \in \left[0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ et $\sin x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

E - Fonctions trigonométriques

★★⯪☆☆ **EXERCICE 10** ....

Soit $f : x \mapsto \cos(3x)$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer les racines de f.
2. Démontrer que f est paire.
3. Démontrer que f est périodique de période $\frac{2\pi}{3}$.
4. Calculer $f'(x)$.
5. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

★★⯪☆☆ **EXERCICE 11** ....

Soit $f : x \mapsto \sin(3x)$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Justifier que f' est dérivable et déterminer la dérivée seconde de f.
3. Démontrer que $f"(x)+9f(x)=0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

★★★☆☆ **EXERCICE 12** ....

Déterminer si les fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$, sont paires, impaires ou ni l'un ni l'autre.

1. $f_1 : x \mapsto \sin^2 x$
2. $f_2 : x \mapsto \cos x \sin x$
3. $f_3 : x \mapsto 1-\sin x$
4. $f_4 : x \mapsto 1+\sin x$
5. $f_5 : x \mapsto \sin^3 x$
6. $f_6 : x \mapsto x\sin^2 x$

★★★⯪☆ **EXERCICE 13** ....

Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{2+\cos x}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer le minimum et le maximum de f sur son domaine de définition.
   Pour chacun d'eux, donner une valeur où il est atteint.

★★★☆☆ **EXERCICE 14** (Périodicité) ....

1. Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que la fonction $f : x \mapsto \cos(kx)$ définie sur $\mathbb{R}$ est $\dfrac{2\pi}{k}$-périodique.
2. Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$, montrer que la fonction $g : x \mapsto \cos\left(\dfrac{x}{m}\right) + \cos\left(\dfrac{x}{m}\right)$ est périodique et période de cette fonction.

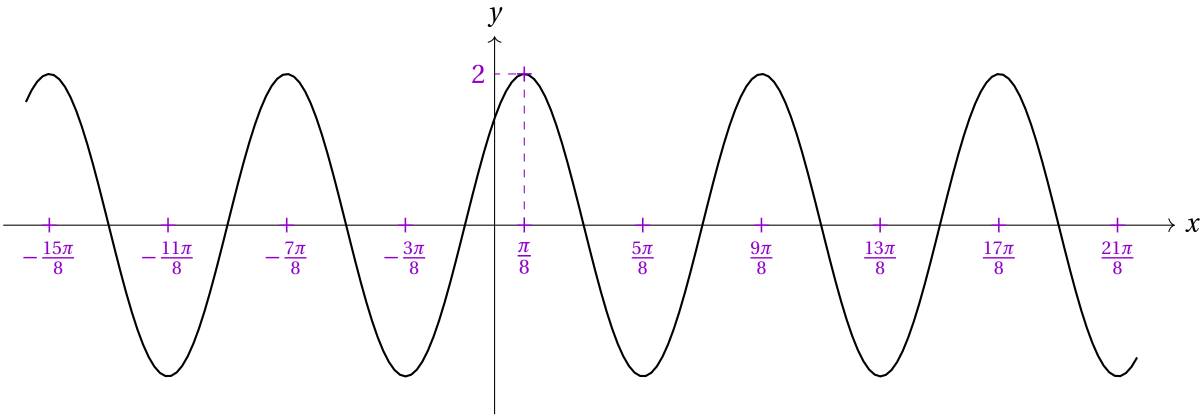
★★★⯪☆ **EXERCICE 15** (Un peu d'élec ⚡) ....

En électricité l'intensité i du courant électrique à un temps t, exprimé en secondes, peut être décrite à l'aide de fonctions trigonométriques.

$$i(t) = i_0 \sin\left(\omega t + \phi\right)$$

où i_0 désigne l'amplitude du signal en ampère, ω est la pulsation de phase en radian par seconde (rad/s) et ϕ le déphasage, exprimé en radian.

1. Montrer que l'intensité i est $\dfrac{2\pi}{\omega}$-périodique.
2. Déterminer, sur la courbe ci-dessous, les valeurs de i_0, ϕ et ω.



3. La valeur de $\cos\phi$ est appelée facteur de puissance. Quel est le facteur de puissance du signal représenté ci-dessus ?

★★★☆☆ **EXERCICE 16** ....

Pour $x \in \mathbb{R}$, déterminer $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2$?

★★★⯪☆ **EXERCICE 17** ....

1. On donne $\cos x = -\dfrac{\sqrt{5}}{4}$ avec $x \in \left[-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right]$. Déterminer $\sin x$;
2. On donne $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ avec $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$. Déterminer $\cos x$;
3. On donne $\cos x = \dfrac{3 - \sqrt{2}}{3}$ avec $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Déterminer $\sin x$;
4. On donne $\cos x = \dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{4}$ avec $x \in \left[-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right]$. Déterminer $\cos x$;
5. On donne $\cos x = \dfrac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{5}$ avec $x \in \left[\dfrac{11\pi}{2}, 6\pi\right]$. Déterminer $\sin x$.