

---

# Applications de la fonction dérivée

---

## Plan du chapitre

---

<b>I Variations d'une fonction</b> .....	<b>2</b>
A - Visualisation graphique .....	2
B - Théorème.....	3
<b>II Extrema</b> .....	<b>5</b>
<b>III Exercices</b> .....	<b>7</b>
A - Variations d'une fonction .....	7
B - Extrema.....	8

---

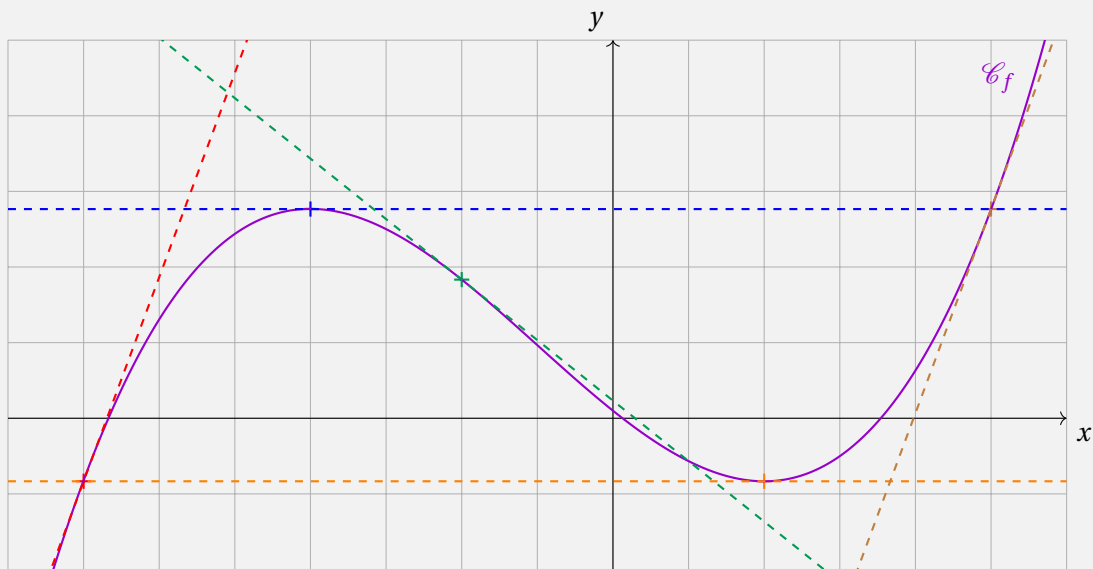
## Introduction

## Partie I Variations d'une fonction

## A - Visualisation graphique

 **Activité 1 : Lien entre fonction dérivée et sens de variation**

On représente graphiquement le graphe d'une fonction  $f$ , dérivable sur  $\mathbb{R}$ , dans le repère orthonormé ci-dessous. De plus on trace les tangentes à  $\mathcal{C}_f$  aux points d'abscisses  $-7, -4, -2, 2$  et  $5$



Répondre aux questions suivantes par lecture graphique

1. Donner le signe du nombre dérivé de  $f$  en  $-7, -4, -2, 2$  et  $5$ .

.....

.....

.....

.....

.....

2. Sans justification dresser le tableau de signes de la fonction dérivée,  $f'$ , de la fonction  $f$ .

$x$	$-\infty$			$+\infty$
Signe de $f'(x)$				

3. Dresser le tableau de variation de  $f$ .

$x$	$-\infty$			$+\infty$
Variations de $f$				

4. Compléter le tableau de signe de la dérivée - variations lié à la fonction  $f$ .  
 Quel lien peut-on faire entre le signe de la fonction dérivée  $f'$  et le sens de variation de la fonction  $f$  ?

$x$	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		
Variations de $f$		

.....

.....

.....

.....

### B - Théorème

**Théorème 1 :**

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  :

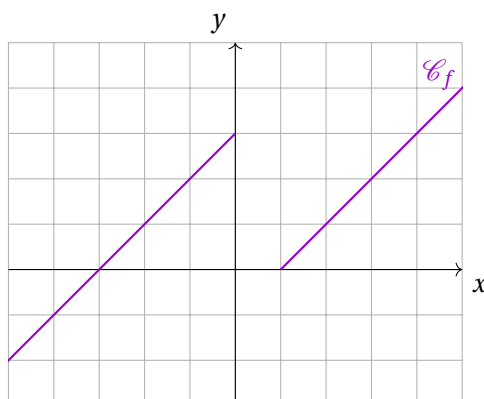
- $f$  est croissante sur  $I$  si, et seulement si,  $f'(x) \geq 0$  pour tout  $x \in I$ .
- $f$  est strictement croissante sur  $I$  si, et seulement si,  $f'(x) > 0$  pour tout  $x \in I$ .
- $f$  est décroissante sur  $I$  si, et seulement si,  $f'(x) \leq 0$  pour tout  $x \in I$ .
- $f$  est strictement décroissante sur  $I$  si, et seulement si,  $f'(x) < 0$  pour tout  $x \in I$ .
- $f$  est constante sur  $I$  si, et seulement si,  $f'(x) = 0$  pour tout  $x \in I$ .

Ce théorème est l'un des théorèmes majeurs des mathématiques du lycée, en effet il nous permet de faire le pont entre les deux grandes études que nous faisons jusqu'ici :

- l'étude du signe d'une fonction
- l'étude du sens de variation d'une fonction

**🔥 Point chaud : Importance d'avoir un intervalle dans le théorème**

Considérons l'ensemble  $E = ]-\infty, 0[ \cup ]1, +\infty[$  et considérons la fonction représenté graphiquement dans un repère orthonormé par :





.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## Partie II Extrema

### Définition 1 : Extremum local

Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathcal{D}_f$  et  $I$  un intervalle inclus dans  $\mathcal{D}_f$ .  
 On dit que  $f$  admet un **extrémum local sur  $I$**  s'il existe  $a \in I$  tel que on ait :

- soit un **maximum local** en  $a$ , c'est-à-dire :  

$$\text{pour tout } x \in I, f(x) \leq f(a)$$
- soit un **minimum local** en  $a$ , c'est-à-dire :  

$$\text{pour tout } x \in I, f(x) \geq f(a)$$

### Exemple :

En considérant le tableau de variation complet suivant :

$x$	-10	-5	-3	-1	0	5	6	10						
Variations de $f$	3	↘	1	↗	2	6	↘	5	↘	-4	↗	-2	↗	0

On peut affirmer que :

- 1 est le minimum local de  $f$  sur  $] - 10, -3[$  atteint en  $x = -5$ ;
- 6 est le maximum local de  $f$  sur  $] - 5, 5[$  mais aussi sur  $] - 10, 5[$  et s'avère même que c'est le maximum global de  $f$  sur  $[-10, 10]$  atteint en  $x = -1$ .

### Théorème 2 : Condition nécessaire et suffisante d'un extremum local

Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $I$  un intervalle ouvert.  
 Si  $f'$  s'annule et change de signe en  $a \in I$  alors  $f$  admet un extremum local en  $a$ .

### ⚠ Attention : Et la réciproque?

La réciproque de ce théorème est fautive, c'est-à-dire :

Si  $f$  admet un extremum local en  $a \in I$  cela n'implique pas que  $f'$  s'annule et change de signe.

Considérer la fonction  $x \mapsto 0$  sur  $]0, 1[$  qui admet un minimum et un maximum local en tout point de l'intervalle ouvert pourtant la dérivée est constante et donc ne change pas de signes.

**🔥 Point chaud :** Et si on fait varier les hypothèses du théorème?

Si on omet l'hypothèse du changement de signe (qui pose problème pour avoir l'équivalence), le théorème reste-t-il vrai? La réponse est **Non**.

En effet en considérant la fonction cube :  $f : x \mapsto x^3$  sur  $\mathbb{R}$  on a que

$$f'(x) = 3x^2 \text{ et donc } f'(0) = 0 \text{ mais ne change pas de signe.}$$

0 n'est pas un extremum local de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  (et même de tout intervalle ouvert contenant 0).

**✂ À savoir faire 2 : Déterminer des extrema locaux**

Déterminer les extrema locaux de la fonction  $f : x \mapsto 2x^3 - x^2 - 5x + 9$ , préciser si ce sont également des extrema globaux.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Partie III Exercices**

**A - Variations d'une fonction**

★★★★☆ **EXERCICE 1** (Études) ..... ①

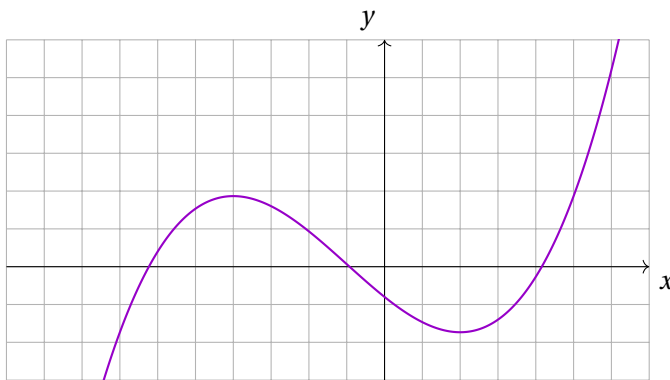
En justifiant la dérivabilité, dresser le tableau de variations de chacune des fonctions suivantes :

- |                                         |                                         |
|-----------------------------------------|-----------------------------------------|
| 1. $f : x \mapsto 2x^3 - 5x^2 - 6x + 3$ | 4. $f : x \mapsto \frac{2x-7}{5x+3}$    |
| 2. $f : x \mapsto x^3 - x^2 + 8x + 1$   | 5. $f : x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$      |
| 3. $f : x \mapsto -3x^3 + x^2 + x$      | 6. $f : x \mapsto \sqrt{2x^2 + 3x - 5}$ |

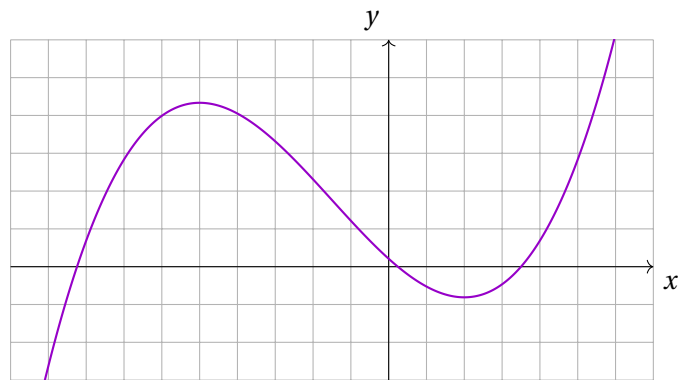
★★★★☆ **EXERCICE 2** (Étude et courbes) ..... ①

On considère la fonction  $f : x \mapsto x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 30x + 7$

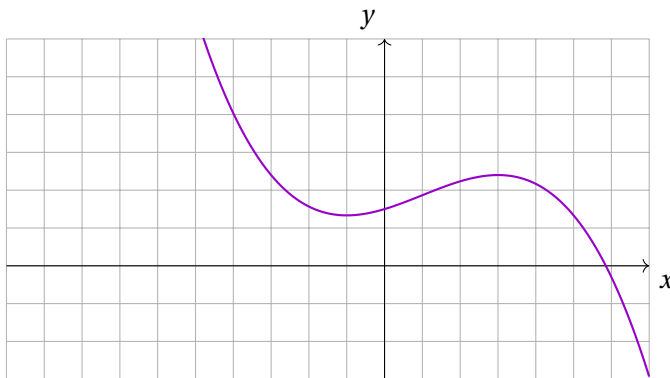
- Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité de  $f$  puis une expression de sa dérivée.
- Déterminer une équation de la tangente à la courbe de  $f$  en 1.
- Déterminer, par le calcul, si la courbe de  $f$  admet des tangentes horizontales, puis les abscisses de ces points.
- En justifiant, déterminer laquelle de ces représentations graphiques peut être celle de la fonction  $f$ .



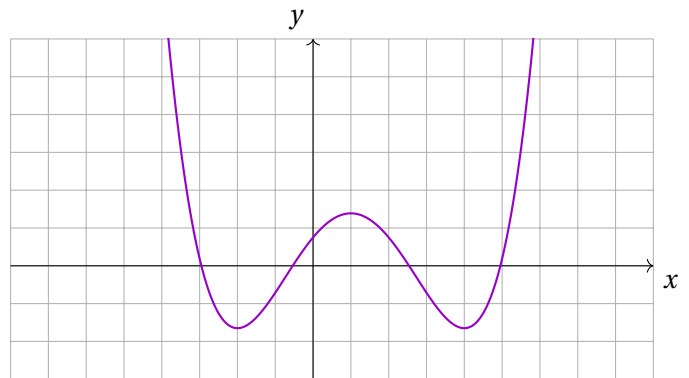
**Courbe 1**



**Courbe 2**



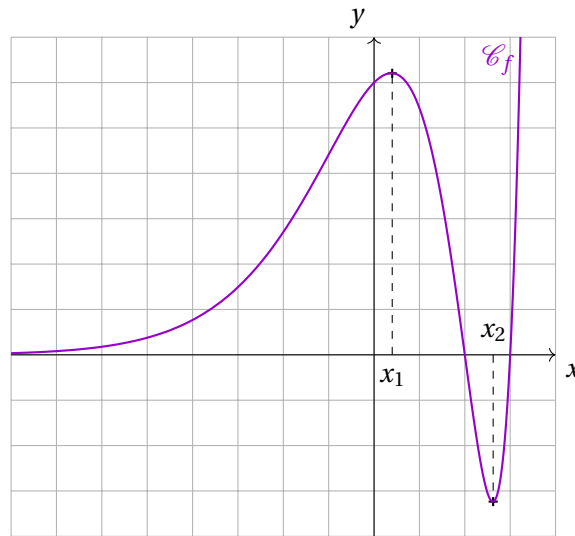
**Courbe 3**



**Courbe 4**

★★★☆☆ EXERCICE 3 (À partir d'une courbe)..... (L)

Dresser le tableau de signes de la dérivée de  $f$ .



## B - Extrema

★★★☆☆ EXERCICE 4 (Études #2) ..... (N)

- On considère la fonction  $f : x \mapsto \frac{x^2 + 5x + 10}{3x}$ .
  - Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité de  $f$ .
  - Déterminer  $f'(x)$ .
  - Construire le tableau de variations de  $f$ .
  - Quels sont les extrema locaux de  $f$ ?
- De la même manière, déterminer les extrema locaux de  $g : x \mapsto x^4 - x^2$ .
- De même, pour  $h : x \mapsto x + \frac{1}{x}$ .

★★★☆☆ EXERCICE 5 (Optimisation #1) ..... (I)

Soit  $P \in \mathbb{R}_+^*$ , on considère l'ensemble des rectangles ayant comme périmètre  $P$ .

On choisit un rectangle  $ABCD$  ayant comme périmètre  $P$ .

L'objectif de cet exercice est de déterminer le rectangle, de périmètre  $P$ , ayant l'aire la plus grande. On fixe  $AB = x$ .

- Déterminer  $BC$ .
- En déduire l'aire du rectangle  $ABCD$  en fonction de  $x$  et de  $P$ .
- Pour quelle valeur de  $x$  cette aire est-elle maximale? A quel rectangle particulier cette valeur de  $x$  correspond-elle?

★★★★☆ EXERCICE 6 (Optimisation #2) ..... (J)

On considère un carré  $ABCD$  de côté 1.

Soit  $M \in [AD]$ , on place un point  $N$  sur la demi-droite  $[AB)$ , à l'extérieur du segment  $[AB]$ , tel que :  $DM = BN = x$ .

La droite  $(MN)$  intersecte le segment  $[BC]$  en un point  $P$ .

Le but de l'exercice est de déterminer la position du point  $M \in [AD]$  tel que  $BP$  soit maximale.

- Déterminer l'ensemble auquel appartient  $x$ .

2. Représenter graphiquement la situation.

3. Déterminer  $BP$  en fonction de  $x$ .

$$\begin{array}{l} f: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ \text{On définit} \quad x \longmapsto \frac{x - x^2}{1 + x} \end{array}$$

4. Dresser le tableau de variation de  $f$ .

5. Conclure.

★★★★☆ EXERCICE 7 (Inégalité) ..... ⌚

Montrer que pour tout  $x > 0$ ,  $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2$ .

★★★★☆ EXERCICE 8 (À vous de chercher) ..... ⌚

Donner un exemple de fonction définie sur  $\mathbb{R}$  possédant exactement quatre extrema locaux.