CHAPITRE 6

Suites arithmétiques et géométriques

Plan du chapitre

Introduction

Partie I Suites arithmétiques

A - Définition et exemples

Définition 1 : Par récurrence

Une suite $(u_n)_n$ est **arithmétique** s'il existe un réel r tel que :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + r, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \\ u_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Le réel r est appelé la **raison** de cette suite et on dit que $(u_n)_n$ est arithmétique de raison r.

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} u_3 \xrightarrow{+r} \cdots$$

Information : On dira que l'on a définit la suite $(u_n)_n$ par récurrence, et la formule $u_{n+1} = u_n + r$ est la formule par récurrence donnant les termes de $(u_n)_n$.

Exemple :

Considérons une suite $(u_n)_n$ arithmétique de raison 2 tel que $u_0 = 0$. On a alors :

$$u_0 = 0 \xrightarrow{+2} u_1 = 2 \xrightarrow{+2} u_2 = 4 \xrightarrow{+2} u_3 = 6, \cdots$$

On remarque que la suite $(u_n)_n$ est la suite des entiers naturels pairs.

À savoir faire 1 : Situation d'une suite arithmétique

Un élève commence son année de Première avec une note de 5 sur 20 en mathématiques, mais il a assuré à son professeur que ses notes allaient augmenter à chaque évaluation de 0,5 point.
On considère alors la suite $(u_n)_n$ donnant les notes de cet élève sur 20 à chaque évaluation de mathématiques, on note u_0 sa première note.

1. Donner la valeur de u_0. ....
2. Donner formule par récurrence de cette suite.
   ....
   ....
   ....
3. Quel type de suite est la suite $(u_n)_n$?
   ....
4. Quelle sera la note de cet élève lors que la troisième évaluation ? et la cinquième ?
   ....
   ....
   ....
   ....

À retenir : Une suite arithmétique de raison r modélise des évolutions successives à accroissement constants égaux à r.

Méthode 1 : Montrer qu'une suite est arithmétique

Une suite est arithmétique s'il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

C'est-à-dire, s'il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n :

$$\boldsymbol{u_{n+1} - u_n = r}$$

En d'autres termes, **pour montrer qu'une suite est arithmétique** il suffit de montrer que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} - u_n$ est égale à **une** constante (indépendante de n).
Et dans ce cas, cette fameuse constante sera la **raison** cette suite arithmétique.

À savoir faire 2 : Montrer qu'une suite est arithmétique

Démontrer que la suite définie explicitement par : $u_n = 2n - 5$ est arithmétique.
On précisera alors le premier terme de cette suite et la valeur de la raison.

....

....

....

....

....

Attention : Étudier les premiers termes ne suffit pas

Considérons la suite définie par :

$$\left(u_0 = 1; u_1 = 4;\ u_2 = 7;\ u_3 = 10;\ u_4 = 15;\ \cdots\right)$$

On a bien :

$$u_1 - u_0 = u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = 3$$

Mais nous avons... $u_4 - u_3 = 5$. D'où $u_4 - u_3 \neq u_3 - u_2$. Ainsi notre suite n'est pas arithmétique.

$$u_0 = 1 \xrightarrow{+3} u_1 = 4 \xrightarrow{+3} u_2 = 7 \xrightarrow{+3} u_3 = 10 \xrightarrow{+5} u_4 = 15 ,\cdots$$

Méthode 2 : Montrer qu'une suite n'est pas arithmétique

Pour qu'une suite soit arithmétique il faut que $u_{n+1} - u_n$ soit égale à une constante r **pour tout $n \in \mathbb{N}$**.
Ainsi **pour montrer qu'une suite n'est pas arithmétique** il nous suffit de donner un contre-exemple où :

$$u_{m+1} - u_m \neq u_{k+1} - u_k$$

Exemple :

Dans notre exemple précédent nous avons montré que :

$$u_4 - u_3 \neq u_3 - u_2$$

ce qui nous a suffit pour démontrer que ce n'était pas une suite arithmétique.

À savoir faire 3 : Montrer qu'une suite n'est pas arithmétique

Démontrer que la suite définie explicitement par : $u_n = 2^n$ n'est pas arithmétique.

....

....

....

....

B - Propriétés

Propriété 1 : Formule explicite

Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ et de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$, la **formule explicite** de $(u_n)_n$ est :

$$u_n = u_0 + nr, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{tikzcd}
u_0 \arrow[r, bend right, "+r"'] \arrow[rrrrr, bend left, "+nr"] & u_1 \arrow[r, bend right, "+r"'] & u_2 \arrow[r, bend right, "+r"'] & u_3 \arrow[r, bend right, "+r"'] & \dots & u_n
\end{tikzcd}$$

Exemple :

Considérons la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$$

C'est une suite arithmétique, en effet pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$u_{n+1} - u_n = 3$$

$(u_n)_n$ est une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 2$. Donc la formule explicite de cette suite est :

$$u_n = 2 + 3n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

***Démonstration* :**

Soient $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$, et de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$.
On sait que :

$$\begin{cases} u_1 = u_0 + r \\ u_2 = u_1 + r \\ . \\ . \\ . \\ u_k = u_{k-1} + r \end{cases}$$

Ainsi en faisant la somme de ces k lignes de ce système on a alors :

$$u_1 + u_2 + ... + u_{k-1} + u_k = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{k-1} + \underbrace{r + r + ... + r}_{k \text{ fois}}$$

En retranchant aux deux membres les termes identiques nous avons :

$$u_k = u_0 + kr, \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}$$

■

À savoir faire 4 : Utiliser la formule explicite

En reprenant le **À savoir faire 1**.

1. Donner la formule explicite de la suite $(u_n)_n$.

   ....

   ....

   ....

2. Déterminons à partir de quelle évaluation l'élève aura 20 sur 20.

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

C - Sens de variation

Propriété 2 : Sens de variation

Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$.

- Si $r < 0$ alors $(u_n)_n$ est strictement décroissante.
- Si $r = 0$ alors $(u_n)_n$ est constante.
- Si $r > 0$ alors $(u_n)_n$ est strictement croissante.

À retenir : Pour une suite arithmétique, le premier terme n'influence pas sur les variations, seule la raison compte.

Démonstration :

Considérons une suite arithmétique $(u_n)_n$ de raison $r \in \mathbb{R}$ et de premier terme u_0.
On a alors :

$$u_{n+1} - u_n = u_n + r - u_n = r$$

Ainsi :

- Si $r < 0$ on a alors $u_{n+1} - u_n = r < 0$ d'où $(u_n)_n$ est strictement décroissante.
- Si $r = 0$ on a alors $u_{n+1} - u_n = r = 0$ d'où $(u_n)_n$ est constante.
- Si $r > 0$ on a alors $u_{n+1} - u_n = r < 0$ d'où $(u_n)_n$ est strictement croissante.

■

À savoir faire 5 : Déterminer le sens de variation d'une suite arithmétique

En s'aidant du **À savoir faire 2**, déterminer le sens de variation de la suite $u_n = 2n - 5$.

....

....

....

D - Somme de termes consécutifs

Propriété 3 : Somme de Gauss

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$1 + 2 + ... + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

À retenir : Notation avec Σ

On abrégera la notation de la somme avec les points de suspension par :

$$1 + 2 + ... + n = \sum_{k=1}^{n} k$$

Ici plusieurs choses :

- On considère une somme, grâce au symbole Σ (sigma)
- On considère un ensemble de nombre, ici l'ensemble des nombres k pour k variant de 1 à n. C'est-à-dire :

$$\{1, 2, 3, ..., n-1, n\}$$

- **Bilan :** La notation :

$$\sum_{k=1}^{n} k$$

nous donne la somme des entiers k, pour k variant de 1 à n, c'est-à-dire on va faire la somme des nombres de l'ensemble : $\{1, 2, 3, ..., n-1, n\}$

On a alors :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + ... + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

***Démonstration* :**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, notons $S = 1 + 2 + ... + n$. On a :

$$\begin{array}{rccccccccc} S = & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & n-1 & + & n \\ +S = & n & + & n-1 & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \\ \hline 2S = & n+1 & + & n+1 & + & \cdots & + & n+1 & + & n+1 \end{array}$$

On a alors :

$$2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + ... + (n+1)}_{n \text{ fois}}$$

D'où :

$$2S = n(n+1)$$
$$\Rightarrow S = \frac{n(n+1)}{2}$$

■

Propriété 4 : Somme des premiers termes d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ et de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, notons :

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

la somme des $n+1$ premiers termes de la suite $(u_n)_n$, on a :

$$S_n = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}$$

À savoir faire 6 : Calculer une somme à l'aide d'une suite arithmétique

L'objectif est de calculer la somme :

$$S = 52 + 55 + 58 + \ldots + 88$$

1. À l'aide des termes de la somme S reconnaître les premiers termes d'une suite arithmétique à préciser.

   ....

   ....

   ....

   ....

2. Déterminer l'indice du terme de la suite $(u_n)_n$ égal à 88.

   ....

   ....

   ....

   ....

3. Déterminer alors la valeur de S.

   ....

   ....

   ....

   ....

***Démonstration* :**

Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ et de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$.
On sait que la formule explicite de notre suite $(u_n)_n$ est :

$$u_k = u_0 + kr, \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + \ldots + u_n \\ &= u_0 + (u_0 + r) + (u_0 + 2r) + \ldots + (u_0 + nr) \end{aligned}$$

En réorganisant la somme, on a alors :

$$\begin{aligned}
S_n &= \underbrace{u_0 + u_0 + \ldots + u_0}_{n+1 \text{ fois}} + r + 2r + \ldots + nr \\
&= (n+1)u_0 + r(1+2+\ldots+n) \\
&= (n+1)u_0 + r\frac{n(n+1)}{2} \\
&= (n+1)\left(u_0 + \frac{rn}{2}\right) \\
&= (n+1)\frac{2u_0 + rn}{2} \\
&= (n+1)\frac{u_0 + u_0 + rn}{2} \\
&= (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}
\end{aligned}$$

■

Propriété 5 : Cas général

Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison r.
Pour tout entiers naturels m et p tels que $p > m$ on a :

$$\sum_{k=m}^{p} u_k = u_m + u_{m+1} + \ldots + u_p = (p-m+1)\frac{u_m + u_p}{2}$$

À retenir : Moyen mnémotechnique

Nous pouvons retenir la formule générique :

$$\boxed{S = (\text{nombre de terme}) \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}}$$

À savoir faire 7 : Calculer une somme à l'aide de la formule générale

Déterminer la somme :

$$S = \sum_{k=8}^{20} u_k = u_8 + u_9 + \ldots + u_{20}$$

où $(u_n)_n$ est une suite arithmétique de raison $0,25$ et de premier terme $0,5$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

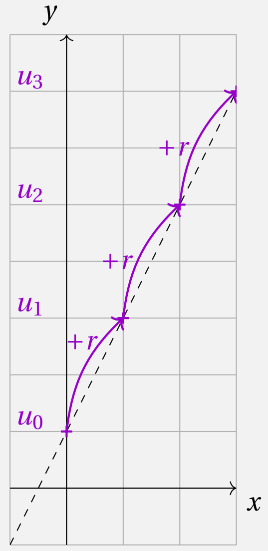
....

....

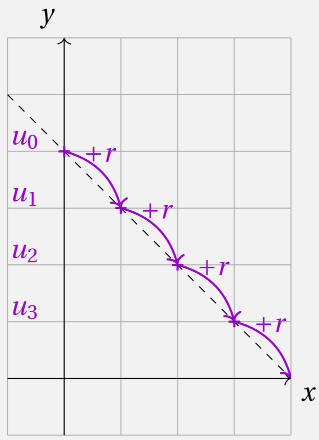
E - Représentation graphique

Propriété 6 : Représentation graphique

Les points de la représentation graphique d'une suite arithmétique sont alignés.



Cas où $r > 0$



Cas où $r < 0$

F - Bonus : Limite

Propriété 7 : Limites

Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ et de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$:

- si $r < 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$, $(u_n)_n$ est divergente.
- si $r = 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u_0$, $(u_n)_n$ est convergente.
- si $r > 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, $(u_n)_n$ est divergente.

Information : Tout comme pour le sens de variation, le premier terme d'une suite arithmétique n'influe pas sur la limite de la suite.

Partie II Suites arithmétiques

A - Définition et exemples

Définition 2 : Par récurrence

Une suite $(u_n)_n$ est **géométrique** s'il existe un réel q tel que :

$$\begin{cases} u_{n+1} = q u_n, & \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \\ u_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Le réel q est appelé la **raison** de cette suite et on dit que $(u_n)_n$ est géométrique de raison q.

$$u_0 \xrightarrow{\times q} u_1 \xrightarrow{\times q} u_2 \xrightarrow{\times q} u_3 \xrightarrow{\times q} \cdots$$

Information : On dira que l'on a définit la suite $(u_n)_n$ par récurrence, et la formule $u_{n+1} = q u_n$ est la formule par récurrence donnant les termes de $(u_n)_n$.

Exemple :

Considérons une suite $(u_n)_n$ géométrique de raison 2 tel que $u_0 = 1$. On a alors :

$$u_0 = 1 \xrightarrow{\times 2} u_1 = 2 \xrightarrow{\times 2} u_2 = 4 \xrightarrow{\times 2} u_3 = 8, \cdots$$

On remarque que la suite $(u_n)_n$ est la suite des puissances positives de 2.

À savoir faire 8 : Situation d'une suite géométrique

Bob possède un compte en banque sur lequel il a 10€ au début de l'année 2020.
Il ne touche jamais l'argent qu'il y a sur ce compte. De plus, la banque lui promet un intérêt à 3% par an.
On considère alors la suite $(s_n)_n$ donnant la somme d'argent sur le compte en banque au début de l'année $2020 + n$.

1. Donner la valeur de s_0 ....
2. Donner formule par récurrence de cette suite.

   ....

   ....

   ....

3. Quel type de suite est la suite $(s_n)_n$?

   ....

4. Quelle sera la somme d'argent qu'il aura son compte en 2023 ? 2025 ?

   ....

   ....

   ....

   ....

À retenir : Une suite géométrique de raison q modélise des modèles du type à intérêts composées, c'est-à-dire chaque année la banque verse les intérêts, un pourcentage de la somme au début d'année.

Méthode 3 : Montrer qu'une suite est géométrique

Une suite est géométrique s'il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = q u_n$$

Ainsi pour montrer qu'une suite est géométrique :

- <u>ou bien :</u> on exprime u_{n+1} en fonction de u_n grâce à une factorisation
- <u>ou bien :</u> **si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$**, on peut montrer que le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant (donc indépendant de n).
  Et dans ce cas, cette fameuse constante sera la **raison** de cette suite géométrique.

À savoir faire 9 : Montrer qu'une suite est géométrique

Démontrer que la suite définie explicitement par : $u_n = -2 \times 3^n$ est géométrique.
On précisera alors le premier terme de cette suite et la valeur de la raison.

....

....

....

....

....

Attention : Étudier les premiers termes ne suffit pas

Considérons la suite définie par :

$$\left(u_0 = 2; u_1 = 6;\ u_2 = 18;\ u_3 = 54;\ u_4 = 108;\ \cdots\right)$$

On a bien :

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = 3$$

Mais nous avons... $\dfrac{u_4}{u_3} = 2$. D'où $\dfrac{u_3}{u_2} \neq \dfrac{u_4}{u_3}$. Ainsi notre suite n'est pas géométrique.

$$\begin{tikzcd} u_0 = 2 \arrow[r, bend left, "\times 3"] & u_1 = 6 \arrow[r, bend right, "\times 3"'] & u_2 = 18 \arrow[r, bend left, "\times 3"] & u_3 = 54 \arrow[r, bend right, "\times 2"'] & u_4 = 108 & \cdots \end{tikzcd}$$

Méthode 4 : Montrer qu'une suite n'est pas géométrique

Il suffit de prouver que le quotient entre deux termes consécutifs n'est pas constant.
C'est-à-dire, il existe n, m deux entiers tels que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \neq \frac{u_{m+1}}{u_m}$$

On fera tout de même attention à ce que : $u_n \neq 0$ et $u_m \neq 0$.

Exemple :

Dans notre exemple précédent nous avons montré que :

$$\frac{u_3}{u_2} \neq \frac{u_4}{u_3}$$

ce qui nous a suffit pour démontrer que ce n'était pas une suite géométrique.

À savoir faire 10 : Montrer qu'une suite n'est pas arithmétique

Démontrer que la suite définie explicitement par : $u_n = 5 - 2n$ n'est pas géométrique.

....

....

....

....

B - Propriétés

Propriété 8 : Formule explicite

Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ et de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$, la **formule explicite** de $(u_n)_n$ est :

$$u_n = q^n u_0, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{tikzcd}
u_0 \arrow[r, bend right, "\times q"'] \arrow[rrrrr, bend left, "\times q^n"] & u_1 \arrow[r, bend right, "\times q"'] & u_2 \arrow[r, bend right, "\times q"'] & u_3 \arrow[r, bend right, "\times q"'] & \dots & u_n
\end{tikzcd}$$

Exemple :

Considérons la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{4} \end{cases}$$

C'est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{4}$ et de premier terme $u_0 = 2$. Donc la formule explicite de cette suite est :

$$u_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n \times 2 = \frac{2}{4^n}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Propriété 9 :

- Si $(u_n)_n$ est une suite géométrique de raison $q \neq 0$ et de premier terme $u_0 \neq 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Si $(u_n)_n$ est une suite géométrique tel que $q = 0$ ou $u_0 = 0$ alors $u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

***Démonstration* :**

Par disjonction de cas :

- **Cas où $(u_n)_n$ est une suite géométrique non nulle.**
  Soient $(u_n)_n$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, et de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ et $k \in \mathbb{N}$.
  Par la propriété précédente on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$, de plus on sait que :

$$\begin{cases} u_1 = q u_0 \\ u_2 = q u_1 \\ . \\ . \\ . \\ u_k = q u_{k-1} \end{cases}$$

Ainsi en effectuant le produit de ces k lignes de ce système on a alors :

$$u_1 \times u_2 \times ... \times u_{k-1} \times u_k = u_0 \times u_1 \times u_2 \times ... \times u_{k-1} \times \underbrace{q \times q \times ... \times q}_{k \text{ fois}}$$

En divisant aux deux membres les facteurs identiques nous avons :

$$u_k = q^k u_0, \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}$$

- **Cas où $(u_n)_n$ est une suite géométrique nulle.**
  Soient $(u_n)_n$ une suite géométrique tel que $q = 0$ ou $u_0 = 0$.
  On sait alors par la propriété précédente que $u_n = 0$ pour tout $n \geq 1$ d'où $u_n = q^n \times u_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

■

À savoir faire 11 : Utiliser la formule explicite

En reprenant le **À savoir faire 8**.

1. Donner la formule explicite de la suite $(u_n)_n$.

   ....

   ....

   ....

2. Déterminons à partir de quelle année Bob aura au moins 1000€ sur son compte bancaire.

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

C - Sens de variation

Propriété 10 : Sens de variation

Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ et de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$.

- Si $q > 1$
  - et si $u_0 > 0$ alors $(u_n)_n$ est croissante.
  - et si $u_0 < 0$ alors $(u_n)_n$ est décroissante.
- Si $0 < q < 1$
  - et si $u_0 > 0$ alors $(u_n)_n$ est décroissante.
  - et si $u_0 < 0$ alors $(u_n)_n$ est croissante.
- Si $q < 0$ alors $(u_n)_n$ n'est pas monotone, u_n change de signe à chaque rang.
- Si $q = 1$ alors $(u_n)_n$ est une suite constante égale à u_0.
- Si $q = 0$ ou $u_0 = 0$ alors $(u_n)_n$ est une suite constante égale à 0.

À retenir : Pour une suite géométrique, le premier terme peut influencer sur les variations, la raison n'est plus seule à être déterminante.

Démonstration :

Considérons une suite géométrique $(u_n)_n$ de raison $q \in \mathbb{R}$ et de premier terme u_0.
On a alors :

$$u_{n+1} - u_n = qu_n - u_n = (q-1)u_n = (q-1)q^n u_0$$

On voit alors que le signe de $u_{n+1} - u_n$ dépend du signe de $q-1$, q^n (donc q) et u_0. Ainsi :

- Si $q > 1$
  - et si $u_0 > 0$ alors $u_{n+1} - u_n = (q-1)q^n u_0 > 0$ d'où $(u_n)_n$ est croissante.
  - et si $u_0 < 0$ alors $u_{n+1} - u_n = (q-1)q^n u_0 < 0$ d'où $(u_n)_n$ est décroissante.
- Si $0 < q < 1$
  - et si $u_0 > 0$ alors $u_{n+1} - u_n = (q-1)q^n u_0 < 0$ d'où $(u_n)_n$ est décroissante.
  - et si $u_0 < 0$ alors $u_{n+1} - u_n = (q-1)q^n u_0 > 0$ d'où $(u_n)_n$ est croissante.
- Si $q < 0$ alors $q = -\tilde{q}$ où $\tilde{q} > 0$ et : $u_n = (-1)^n \tilde{q}^n u_0$ d'où u_n change de signe à chaque rang et donc $(u_n)_n$ n'est pas monotone.
- Si $q = 1$ alors $u_n = u_0 q^n = u_0$ d'où $(u_n)_n$ est constante égale à u_0.

■

À savoir faire 12 : Déterminer le sens de variation d'une suite arithmétique

En s'aidant du **À savoir faire 9**, déterminer le sens de variation de la suite $u_n = -2 \times 3^n$.

....

....

....

D - Somme de termes consécutifs

Propriété 11 : Première somme géométrique

Soit $q \neq 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q^2 + \ldots + q^{n-1} + q^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1-q}$$

Démonstration :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, notons $S = 1 + 2 + \ldots + n$. On a :

$$\begin{array}{rccccccccc}
S = & 1 & + & q & + & \cdots & + & q^{n-1} & + & q^n \\
-qS = & -q & - & q^2 & - & \cdots & - & q^n & - & q^{n+1} \\
\hline
S - qS = & 1 & & & & & & & - & q^{n+1}
\end{array}$$

On a alors :

$$S - qS = 1 - q^{n+1}$$

D'où :

$$S(1-q) = 1-q^{n+1}$$
$$\Rightarrow S = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

■

Propriété 12 : Somme des premiers termes d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, notons :

$$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

la somme des $n+1$ premiers termes de la suite $(u_n)_n$, on a :

$$S_n = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

À savoir faire 13 : Calculer une somme à l'aide d'une suite géométrique

L'objectif est de calculer la somme :

$$S = 1+2+4+...+2024$$

1. À l'aide des termes de la somme S reconnaître les premiers termes d'une suite géométrique à préciser.

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

2. Déterminer l'indice du terme de la suite $(u_n)_n$ égal à 2024.

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

3. Déterminer alors la valeur de S.

   ....

   ....

   ....

   ....

Démonstration :

Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$.
On sait que la formule explicite de notre suite $(u_n)_n$ est :

$$u_k = q^k u_0, \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + \ldots + u_n \\ &= u_0 + (qu_0) + (q^2 u_0) + \ldots + (q^n u_0) \\ &= u_0 \left(1 + q + q^2 + \ldots + q^n\right) \\ &= u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \end{aligned}$$

■

Propriété 13 : Cas général

Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$.
Pour tout entiers naturels m et p tels que $p > m$ on a :

$$\sum_{k=m}^{p} u_k = u_m + u_{m+1} + \ldots + u_p = u_m \frac{1 - q^{p-m+1}}{1 - q}$$

À retenir : Moyen mnémotechnique

Nous pouvons retenir la formule générique :

$$\boxed{S = (\text{premier terme}) \times \frac{1 - q^{\text{nombre de terme}}}{1 - q}}$$

À savoir faire 14 : Calculer une somme à l'aide de la formule générale

Déterminer la somme :

$$S = \sum_{k=8}^{20} \frac{1}{2 \times 4^k}$$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

....

....

....

....

....

....

E - Représentation graphique

Propriété 14 : Représentation graphique

L'évolution des termes d'une suite géométrique de premier terme positif et de raison $q > 1$ est dite exponentielle.

F - Bonus : Limite

Propriété 15 : Limites

Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ et de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$:

- Si $q > 1$
  - et si $u_0 > 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
  - et si $u_0 < 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$
- Si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u_0$
- Si $0 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Information : Tout comme pour le sens de variation, le premier terme d'une suite arithmétique influe sur la limite de la suite.

Partie III Exercices

A - Suites arithmétiques

A.1 - Généralités

★⯪☆☆☆ **EXERCICE 1**

Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique, calculer u_1, u_2, u_3 dans chacun des cas suivants :

1. $u_0 = 3$ et $r = 4$.
2. $u_0 = \frac{2}{5}$ et $r = -\frac{1}{3}$.

★★⯪☆☆ **EXERCICE 2**

Soit $(u_n)_n$ une suite telle que $u_3 < u_4$ et $u_4 > u_5$, la suite $(u_n)_n$ peut-elle être arithmétique ?

★★☆☆☆ **EXERCICE 3**

Soit $(u_n)_n$ une suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = (n+7)^2 - (n-3)^2$$

La suite $(u_n)_n$ est-elle arithmétique ?

A.2 - Formule explicite

★⯪☆☆☆ **EXERCICE 4**

Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison -2 telle que $u_9 = -61$. Déterminer u_0.

★⯪☆☆☆ **EXERCICE 5**

Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique telle que $u_3 = 8$ et $u_9 = -16$. Déterminer la raison de cette suite.

★⯪☆☆☆ **EXERCICE 6**

Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique telle que $u_{30} = 25$ et $u_{140} = 49$. Déterminer u_{300}.

A.3 - Sens de variation

★★☆☆☆ **EXERCICE 7**

Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison $2-\sqrt{2}$. Quel est le sens de variation de la suite $(u_n)_n$?

★★⯪☆☆ **EXERCICE 8**

Soit $(u_n)_n$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_n = 12 - 3n$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Justifier que $(u_n)_n$ est arithmétique. Quelle est sa raison ?
3. Quel est le sens de variation de $(u_n)_n$.
4. À partir de quel rang n a-t-on $u_n < 50$?

★★⯪☆☆ **EXERCICE 9** (Bac STMG Polynésie - 2014)

D'après l'INSEE, l'espérance de vie à la naissance est passée pour les hommes de 59,9 ans en 1946 à 78,5 ans en 2012.

On se propose ici de modéliser l'espérance de vie pour les hommes par la suite arithmétique $(U_n)_n$ de premier terme $U_0 = 59,9$ et de raison $r = 0,25$.

Ainsi définie U_n est l'espérance de vie à la naissance pour les hommes à l'année $1946 + n$.

1. Calculer U_1, U_2 et U_3. À quoi correspondent ces valeurs ?
2. Exprimer U_n en fonction de n.
3. Entre 1946 et 2012, les hommes ont-ils gagné, en réalité, plus de 3 mois d'espérance de vie chaque année en moyenne ?
4. Selon ce modèle, en quelle année l'espérance de vie pour les hommes dépassera-t-elle les 85 ans ?

A.4 - Somme des termes consécutifs

★★⯪☆☆ **EXERCICE 10** ....

Calculer les sommes suivantes :

1. $S_1 = 1+2+3+\cdots+25$
2. $S_2 = 1+3+5+\cdots+37$
3. $S_3 = 8+12+16+\cdots+244$
4. $S_4 = 9+7+5+\cdots+(-21)$

★★⯪☆☆ **EXERCICE 11** ....

Pour quelle valeur de n a-t-on l'égalité suivante : $3+6+9+\cdots+3n = 2583$?

★★⯪☆☆ **EXERCICE 12** ....

Une personne souscrit un abonnement pour un service. En 2020, ce service était au tarif de 30€ la première année puis il y a une augmentation de 2€ par an. On note a_n le prix de l'abonnement pour l'année $2020+n$.

1. Que vaut a_0 ? a_1 ?
2. Quelle est la nature de la suite $(a_n)_n$?
3. Combien la personne paiera-t-elle son abonnement d'un an en 2030 ?
4. Si la personne reste abonnée 2020 à 2030, combien aura-t-elle déboursé au total ?

★★★★★ **EXERCICE 13** (Somme des premiers carrés) ....

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche à déterminer la valeur de la somme suivante : $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$.
On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = (n+1)^3 - n^3$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)^3 = n^3+3n^2+3n+1$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3n^2+3n+1$.
3. En exprimant la somme $u_1+u_2+\cdots+u_n$ d'une autre façon, déterminer la valeur de la somme $1^2+2^2+\cdots+n^2$.

★★★★☆ **EXERCICE 14** ....

Déterminer les réels a, b et c sachant que ce sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique et $\begin{cases} a+b+c=54 \\ abc=5670 \end{cases}$

B - Suites géométriques

B.1 - Généralités

★⯪☆☆☆ **EXERCICE 15** ....

Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique, calculer u_1, u_2 et u_3 dans chacun des cas suivants :

1. $u_0 = 2$ et de raison $q = -3$.
2. $u_0 = \dfrac{2}{3}$ et de raison $q = \dfrac{1}{4}$.

★⯪☆☆☆ **EXERCICE 16** ....

1. Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ et telle que : $u_3 = 64$. Déterminer u_0, u_1, u_2 et u_4.
2. Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique telle que $u_4 = 4$ et $u_6 = 36$. Que peuvent valoir u_5 et u_7 ?
3. Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique telle que $u_{44} = -2$ et $u_{47} = 54$. Quelle est la raison de la suite $(u_n)_n$?

B.2 - Formule explicite

★★☆☆☆ **EXERCICE 17** ....

1. Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique de raison -1 telle que $u_0 = \pi$. Que vaut u_{2025} ?
2. Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique de raison 2 telle que $u_0 = \dfrac{1}{256}$. Que vaut u_{10} ?

★★⯪☆☆ **EXERCICE 18** (Feuille A4) ....

On dispose d'une feuille de papier d'une épaisseur de 0,1 mm. On va plier, étape par étape, cette feuille en deux et s'intéresser à l'épaisseur de notre feuille pliée. On note a_n l'épaisseur de la feuille, en mètre, après n pliage.

1. Que vaut a_0 ? a_1 ?
2. Sachant que la distance Terre-Lune et de 384400km, combien de fois faut-il plier la feuille de départ sur elle-même pour que l'épaisseur de la feuille ainsi pliée soit plus grande que la distance Terre-Lune ?

B.3 - Sens de variation

★★★☆☆ **EXERCICE 19** ....

Dans chacun des cas suivants, déterminer le sens de variation.

1. $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 3u_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = 4u_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$
3. $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}u_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$
4. $\begin{cases} u_0 = -\dfrac{1}{3} \\ u_{n+1} = \pi u_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$
5. $\begin{cases} u_0 = 2026 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{5}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$
6. $\begin{cases} u_0 = -21 \\ u_{n+1} = -u_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$
7. $u_n = 2 \times 5^n$;
8. $u_n = 2\left(-\dfrac{47}{48}\right)^n$;
9. $u_n = -3\left(\dfrac{101}{100}\right)^n$;
10. $u_n = -2\left(\dfrac{47}{48}\right)^n$.

★★☆☆☆ **EXERCICE 20** (Arithmétique et géométrique) ....

Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique et géométrique. Montrer que $(u_n)_n$ est une suite constante.

B.4 - Somme des termes consécutifs

★★⯪☆☆ **EXERCICE 21** ....

Calculer les sommes suivantes :

1. $S_1 = 3 + 9 + 27 + \cdots + 3^{12}$
2. $S_2 = 1 + 2 + 4 + \cdots + 1024$
3. $S_3 = 8 + 4 + 2 + \cdots + \dfrac{1}{32}$

★★☆☆☆ **EXERCICE 22** ....

Le tarif d'adhésion d'un club de sport est de 300€ annuel, ce tarif annuel augmente de 5% chaque année. Quelle somme totale, arrondie à l'euro près, aura versé un adhérent si elle s'abonne tous les ans pendant 10 ans ? 15 ans ?

★★★☆☆ **EXERCICE 23** ....

Soit $(u_n)_n$ une suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{1}{3} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Démontrer qu'il existe une valeur u_0 pour laquelle la suite $(u_n)_n$ est une suite constante.
2. On pose $u_0 = 2$ et on définir la suite $(v_n)_n$ par :

$$v_n = u_n - 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

   (a) Montrer que $(v_n)_n$ est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.
   (b) Donner l'expression explicite de $(v_n)_n$ puis de $(u_n)_n$.
3. On pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$$

   (a) Exprimer S_n en fonction de n.
   (b) Faire de même avec $S'_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

★★⯪☆☆ **EXERCICE 24** (Grain de riz et échiquier) ....

Une légende raconte qu'il y a très longtemps, Shiram, un roi d'Inde, voulait récompenser Sissa, l'inventeur des échecs, pour le remercier des plaisirs que le jeu lui procurait. Le roi lui proposa d'accomplir le souhait de son choix. Sissa, humble et rusé, fit une demande à première vue modeste : « Majesté, je voudrais que vous placiez un grain de riz sur la première case de votre échiquier. Ensuite, doublez le nombre de grains de riz à chaque case suivante jusqu'à la soixante-quatrième et dernière case ». Le roi, amusé par une demande si modeste, accepta immédiatement.

1. Déterminer le nombre de grains de riz que le roi doit à Sissa.
2. En sachant que la production mondiale journalière de grains de riz est, de nos jours, de 6×10^8, montrer qu'il lui faudra au moins 2^{29} jours pour régaler Sissa.

C - Horizon BAC

★★★☆☆ **EXERCICE 25** (Suite arithmetico-géométrique) ....

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 4000 \\ u_{n+1} = 0,8u_n + 1000, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. La suite $(u_n)_n$ est-elle arithmétique ? géométrique ?
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - 5000$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
   (b) Quelle est la nature de la suite $(v_n)_n$?
   (c) En déduire une expression de v_n en fonction de n.
   (d) En déduire une expression de u_n en fonction de n. Quelle est la limite de $(u_n)_n$.

★★★☆☆ **EXERCICE 26** (Une nouvelle suite arithmético-géométrique) ....

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + 2, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Quelle est l'expression de la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. Déterminer le point fixe α de f, c'est-à-dire le point x tel que $f(x) = x$.

On pose alors pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_n - \alpha$.

3. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = f(u_n) - f(\alpha)$.
   En déduire que la suite $(v_n)_n$ est géométrique, préciser sa raison et son premier terme.
4. En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

★★★☆☆ **EXERCICE 27** (Évolution de population) ....

On s'intéresse à l'évolution de la population d'une ville. En 2020, la population de cette ville était de 10 000 habitants. Deux modèles d'évolution de la population sont proposés.

1. **Modèle A :** On suppose que la population de la ville augmente de 200 habitants chaque année.
   On note u_n la population de la ville à l'année $2020 + n$ selon ce modèle.
   (a) Que représente u_1 ? Calculer sa valeur.
   (b) Quelle est la nature de la suite $(u_n)_n$? Justifier.
   (c) Selon ce modèle, quelle sera la population de la ville en 2030.
2. **Modèle B :** On suppose désormais que la population augmente de 1% par an.
   On note $(v_n)_n$ la population de la ville pour l'année $2020 + n$ selon ce modèle.
   (a) Déterminer v_1 puis v_2.
   (b) Quelle est la nature de la suite $(v_n)_n$?
   (c) Exprimer $(v_n)_n$ en fonction de n.
   (d) Selon ce modèle, quelle sera la population de la ville en 2030 ? Arrondir à l'unité si nécessaire.
3. La population donnée par le **modèle B** sera-t-elle toujours inférieur à la population donnée par le **modèle A**.

★★★☆☆ **EXERCICE 28** ....

On considère la suite $(u_n)_n$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{6u_n + 4}{u_n + 9} \end{cases}$$

Soit $(v_n)_n$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $v_n = \dfrac{u_n + 4}{u_n - 1}$.

1. Démontrer que la suite $(v_n)_n$ est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
2. En déduire l'expression explicite de $(v_n)_n$ puis de $(u_n)_n$.
3. En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_n$.

★★★☆☆ **EXERCICE 29** ....

1. Soit $(u_n)_n$ une suite définie par
$$\begin{cases} u_0 = -\dfrac{3}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 4}{u_n + 3} \end{cases}$$
   (a) Calculer la valeur de u_1, u_2 et u_3.
   (b) Cette suite est-elle arithmétique ? géométrique ?

2. Soit $(v_n)_n$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{u_n + 2}{u_n - 2}$.
   (a) Démontrer que $(v_n)_n$ est une suite géométrique de raison 5.
   (b) Donner l'expression explicite de la suite $(v_n)_n$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 2 - \dfrac{28}{5^n + 7}$.
4. En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_n$.

★★★★☆ **EXERCICE 30** ....

On considère deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{3 \times 2^n - 4n + 3}{2} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{3 \times 2^n + 4n - 3}{2}$$

1. Soit $(w_n)_n$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $w_n = u_n + v_n$.
   Démontrer que $(w_n)_n$ est une suite géométrique.
2. Soit $(t_n)_n$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $t_n = u_n - v_n$.
   Démontrer que $(t_n)_n$ est une suite arithmétique.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, démontrer que $u_n = \dfrac{w_n + t_n}{2}$.
4. Exprimer en fonction de n :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$