CHAPITRE 4

Du nombre dérivé à la fonction dérivée

Plan du chapitre

Introduction

Partie I Approche intuitive de la notion de limite

La notion de limite est incontournable pour appréhender la notion de dérivée, c'est pourquoi dans ce cours nous allons tenter de donner une approche intuitive de la limite.

Exemple :

Considérons un nombre réel x et $f(x)$ son image par la fonction carré ($f(x) = x^2$).
Imaginons que notre nombre x varie et se rapproche de 3 (on dira que $\boldsymbol{x}$ **tend vers 3**). Légitiment on peut se demander vers quelle valeur va se rapprocher $f(x)$?
On arrive facilement à comprendre que $f(x)$ se rapproche alors de .... (c'est-à-dire $\boldsymbol{f(x)}$ **tend vers** ....).
On dira plus formellement que : ....
Cette phrase peut-être condensé en une notation :

....

La flèche du bas : $x \to 3$ signifie ....

Attention : Ne pas confondre.
On ne confondra pas $x \to 3$ et $x \mapsto 3$, la première signifie que « x tend vers 3 » donc le réel x varie et se rapproche de 3 autant que l'on veut. La seconde flèche définie une fonction constante qui à tout x lui associe le réel 3.
Ce ne sont pas les deux mêmes objets, malgré qu'elles se ressemblent leurs significations sont bien différentes.

À savoir faire 1 : Premiers calculs de limite

Calculer chacune des limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{1}{x} =$ ....
2. $\lim\limits_{x \to 0} 2x + 3 =$ ....
3. $\lim\limits_{x \to 1} 7 =$ ....
4. $\lim\limits_{x \to -5} x^2 + 2x =$ ....
5. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{2 - 3x} =$ ....
6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x + 3}{4 - 6x} =$ ....

Définition 1 : Limite

On dit que $f(x)$ a pour **limite** un nombre L lorsque x tend vers le réel x_0 si les valeurs de $f(x)$ peuvent être aussi proche de L que l'on veut pourvu que x soit suffisamment proche de x_0.
On notera alors :

....

et on lira : ....

On comprend assez intuitivement que lorsque « tout va bien », c'est-à-dire lorsque notre fonction n'a pas de « problème » en x_0, on a :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Exemple :

Regardons un cas où « tout ne va pas bien », où notre fonction f n'est pas définie en x_0.
Regardons par exemple la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x^2+1)-1}{x}$$

Si on note $f : x \mapsto \frac{(x^2+1)-1}{x}$, f n'étant pas définie en 0 on ne peut pas déterminer son image par f.
Intéressons nous aux valeurs de $f(x)$ lorsque x tend vers 0, pour cela voici un tableau de valeurs :

x	$-0,5$	$-0,1$	$-0,01$	$-0,001$	...	$0,001$	$0,01$	$0,1$	$0,5$
$f(x)$	1,5	1,9	1,99	1,999	?	2,001	2,01	2,1	2,5

On constate que $f(x)$ se rapproche de 2 lorsque x tend vers 0.
On peut alors conjecturer que :

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x^2+1)-1}{x} = 2$$

Partie II Nombre dérivé

A - Taux de variation d'une fonction

Dans toute cette partie on considère une fonction :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathscr{D}_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

et deux nombres réels distincts a et $b \in \mathscr{D}_f$.

Définition 2 : Taux de variation

Le **taux de variation** de la fonction f entre a et b est le nombre :

$$T_f(a,b) = \text{.............................}$$

Exemple :

En considérant que f est la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$, on a :
le taux de variation de la fonction carré entre 2 et 3 est :

$$T_f(2,3) = \text{.......................................}$$

Propriété 1 : Interprétation géométrique

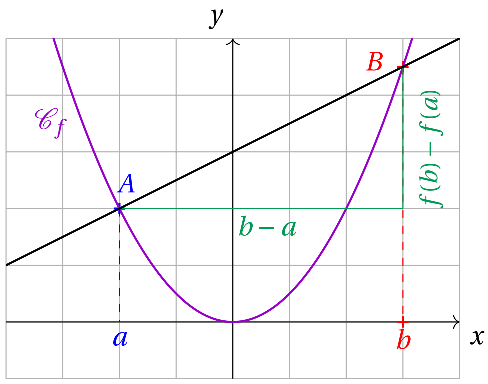
Soient $A\left(a, f(a)\right)$ et $B\left(b, f(b)\right)$ deux points distincts de la courbe représentative $\mathscr{C}_f$.
Le taux de variations de f entre a et b est le **coefficient directeur** de la sécante (AB).

***Démonstration* :**

En effet,

$$T_f(a,b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Or on sait que le quotient $\frac{y_B - y_A}{x_A - x_B}$, pour deux points distincts A et B, donne le coefficient directeur directeur de la droite (AB). ■



Taux de variations de la fonction carré entre *a* et *b*

Information : Différence entre taux de variation et taux d'accroissement ?
Il n'y a pas de différence entre les deux, si ce n'est le contexte. On parle de taux d'accroissement pour la pente d'une droite donc pour le quotient $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$. Et de taux de variation d'une fonction pour le quotient : $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

À savoir faire 2 : Taux de variation

Déterminer le taux de variation de la fonction $f : x \longmapsto x^2 - 2x$ entre 1 et 4.
Interpréter géométriquement ce résultat.

....

....

....

....

....

....

....

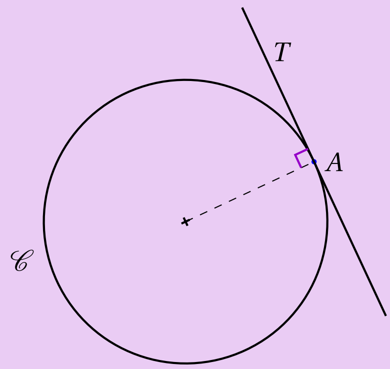
....

....

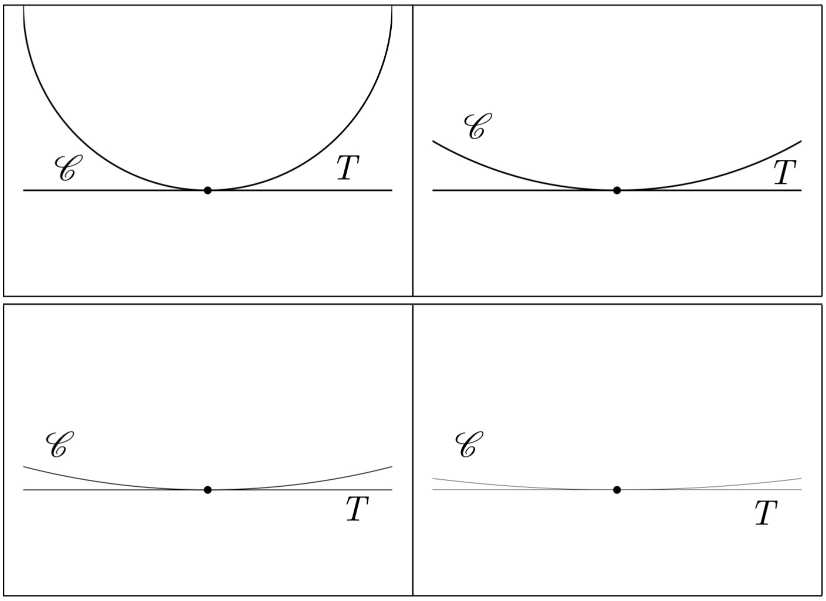
B - Tangente à une courbe (construction intuitive)

Définition 3 : Tangente à un cercle

La **tangente** à un cercle $\mathscr{C}$ est la droite T qui intersecte $\mathscr{C}$ en un unique point.
On sait qu'elle est également perpendiculaire au rayon issue du point de tangence A.

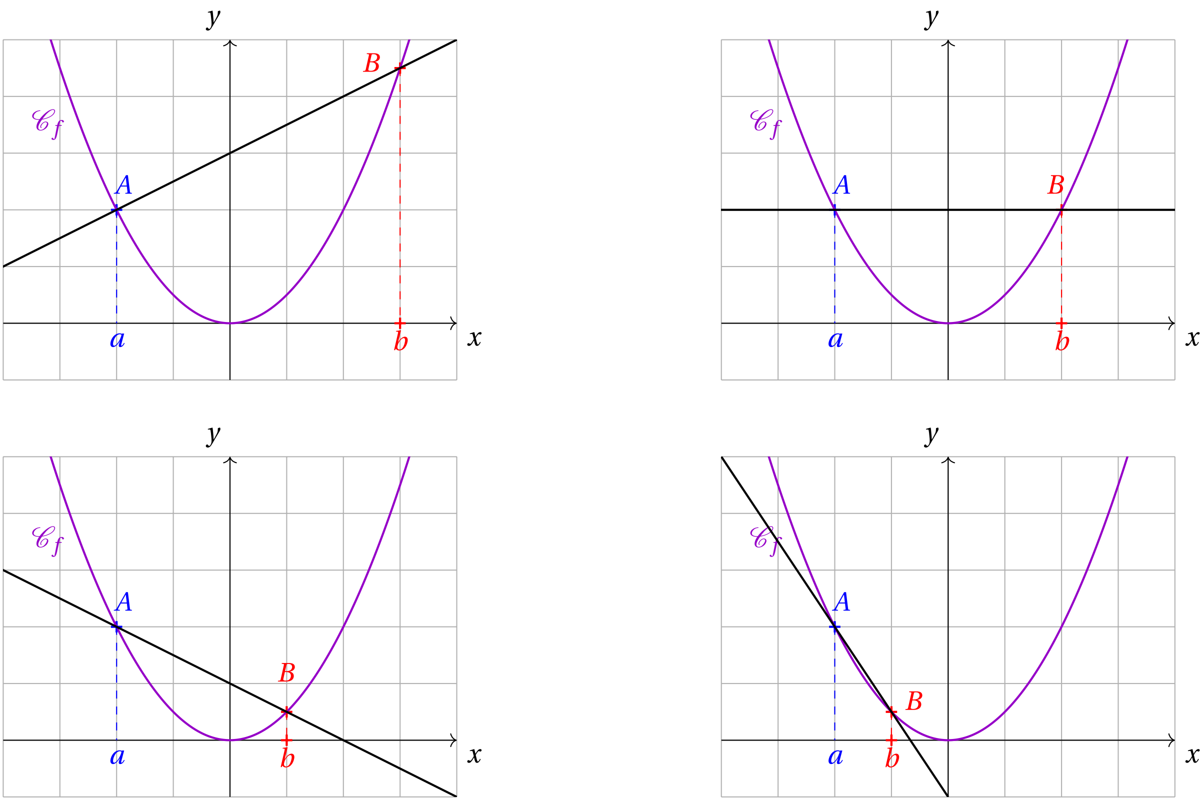


En zoomant autour du point de tangence, on observe que plus l'agrandissement augmente, plus le cercle $\mathscr{C}$ et la tangente T paraissent se confondre. Autour du point A, le cercle peut donc être approximé par sa tangente. Il faut toutefois rester vigilant : cette propriété est locale, non globale ! Le cercle et sa tangente sont très proches dans un voisinage immédiat de A, mais ils deviennent rapidement très différents dès que l'on s'en éloigne.

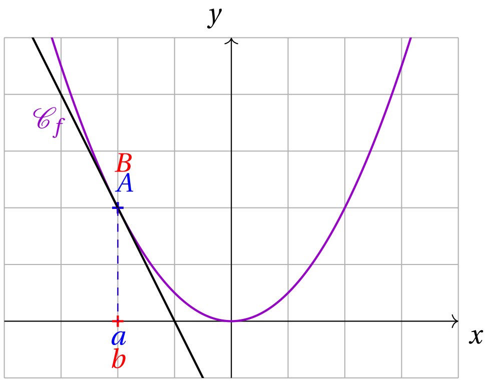


Information : C'est ce phénomène qui nous a longtemps laissé croire que la Terre était plate.

Cette propriété exceptionnelle, que l'on peut confondre localement le cercle à une droite, qui nous pousse à chercher des tangentes à une courbe afin de nous faciliter l'étude des fonctions.
Construction : Si l'on souhaite construire la tangente à une courbe $\mathscr{C}_f$ en un point A.
On va considérer un point $B \in \mathscr{C}_f$ mobile le long de $\mathscr{C}_f$ et la sécante (AB). L'objectif est de faire tendre le point B vers le point A :



Jusqu'à obtenir :



On voit alors que la droite (AB) pivote autour de A pour finir lorsque l'abscisse b se rapproche fortement de l'abscisse a vers une droite que l'on appelera la tangente à $\mathscr{C}_f$ en A.
Ici, il est clair qu'il y a un passage à la limite le réel $b \to a$. La tangente à $\mathscr{C}_f$ en A est la droite limite des sécantes (AB) lorsque $b \to a$.
Ce qui nous intéressera par la suite sera le coefficient directeur limite de cette tangente.
Voici une vidéo illustrant la construction que l'on vient de faire.

Scannez-moi

C - Dérivabilité locale

Définition 4 : Nombre dérivé

Si $\mathscr{C}_f$ admet une tangente non verticale au point d'abscisse a, on dit que f est **dérivable en a**.
Le coefficient directeur de cette tangente s'appelle le **nombre dérivé de f en a** et on le note $f'(a)$ (se lit « f prime de a ») et on a :

....

À retenir : Pour justifier la formule donnant le nombre dérivé de f en a. Comme le coefficient directeur de la sécante (AB) où $B \in \mathscr{C}_f$ est donné par :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

On dira alors que la limite de ce coefficient directeur lorsque b tend vers a sera le coefficient directeur de la droite limite des sécantes (AB) quand $B \to A$, donc le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en A. D'où on a l'égalité :

$$\lim_{b\to a} \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Propriété 2 : Dérivabilité

f est **dérivable en a** si, et seulement si, $\displaystyle\lim_{b\to a} \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ existe et est une valeur finie.

Exemple :

Montrons que la fonction carré, f, est dérivable en 1 et calculons son nombre dérivé en 1 : $f'(1)$.
Pour cela montrons que : .... est une valeur finie.
Commençons par déterminer $\dfrac{f(b)-f(1)}{b-1}$:

$$\begin{aligned}\frac{f(b)-f(1)}{b-1} &= \text{...}\\ &= \text{...}\end{aligned}$$

Comme $b \to 1$, c'est-à-dire b va se rapprocher autant que possible de 1 sans être égale à 1, donc $b-1 \neq 0$.
Ainsi :

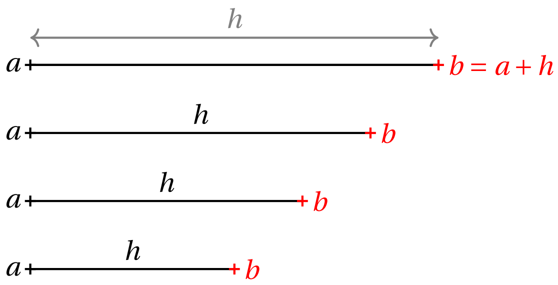
$$\frac{f(b)-f(1)}{b-1} = \text{................................}$$

Donc :

$$\lim_{b\to 1} \frac{f(b)-f(1)}{b-1} = \text{...} = \text{..................}$$

D'où f est dérivable en 1 et son nombre dérivé en 1 est égal à ...., ce qui veut dire que ....
....

Pour simplifier les calculs de limite, nous pouvons redéfinir le calcul le nombre dérivé de f en a.
Pour cela il faut remarquer que : b tend vers a si, et seulement si, la distance de a à b tend vers 0.



Ainsi en notant h la distance de a à b ($h = b - a$) on peut alors noter b de la façon suivante :

$$b = a + h$$

Dans ce cas on a bien que :

$$b \to a \quad \text{si, et seulement si} \quad h \to 0$$

On peut alors redéfinir le nombre dérivé pour simplifier le nombre dérivé :

Propriété 3 : Nombre dérivé

Lorsque f est dérivable en a, on a :

....

Exemple :

En utilisant cette propriété retrouvons le résultat de l'exemple précédent.

Déterminons ...., tout d'abord on a :

$$\begin{aligned}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots$$

À savoir faire 3 : Calcul de nombres dérivés

1. Étudier la dérivabilité de la fonction $f : x \mapsto x^2 - 2x$ en 0.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

2. Étudier la dérivabilité de la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2}{2} - x - 1$ en 2.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

3. Étudier la dérivabilité de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ en 1.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

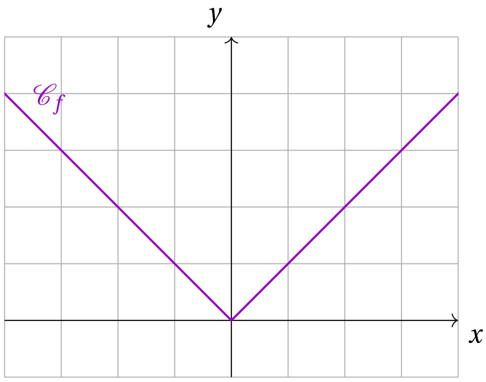
Information : Les fonctions sont-elles toutes dérivables en tout point de leur domaine définition ?
La réponse est non, il existe de nombreuses fonctions qui ne sont pas dérivables en des points où elles sont pourtant définies.
L'exemple le plus connu est celui de la fonction valeur absolue.

Exemple :

Considérons la fonction valeur absolue :

$$\begin{array}{rccl} |\,|: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \end{array}$$

Sa courbe représentative est la suivante :



Il semblerait que la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 0 n'ait pas le même coefficient directeur que l'on arrive en 0 par la droite (c'est-à-dire avec des valeurs positives) que par la gauche (c'est-à-dire avec des valeurs négatives). Donc on peut conjecturer que la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0. Démontrons le :
Pour cela, déterminons $\dfrac{|0+h|-|0|}{h}$ pour $h > 0$ puis $h < 0$:

- **Cas $h > 0$:** On a :
$$\frac{|0+h|-|0|}{h} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
- **Cas $h < 0$:** On a :
$$\frac{|0+h|-|0|}{h} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ainsi on a :
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|0+h|-|0|}{h} = 1 \neq -1 = \lim_{h\to 0^-} \frac{|0+h|-|0|}{h}$$

D'où $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{|0+h|-|0|}{h}$ n'existe pas et la fonction valeur absolue n'est donc pas dérivable en 0.

À retenir : On retiendra qu'une fonction dérivable en un point ne présente pas d'« angle » en ce point.
Ce qui n'est pas le cas de la fonction valeur absolue en 0.

D - Équation de la tangente

On sait déjà par définition que le coefficient directeur de la tangente (non verticale) à $\mathscr{C}_f$ en $A(a, f(a))$ est $f'(a)$. Il nous reste à déterminer l'ordonnée à l'origine de notre tangente.

Théorème 1 : Équation de la tangente

Soit f une fonction dérivable en $a \in \mathbb{R}$.
La tangente $T_{f,a}$ à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a a pour équation réduite :

$$T_{f,a} : \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Démonstration :

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

■

À retenir : En pratique on retiendra surtout comment on détermine l'ordonnée à l'origine de notre tangente.

Exemple :

Déterminons l'équation de la tangente à la courbe de la fonction carré au point d'abscisse 1.
On sait que le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 est ....
.... D'après les exemples précédents on sait que :

$$f'(1) = 2$$

Ainsi on sait déjà que :

$$T_{f,1} : y = 2x + p$$

Par définition de la tangente, on sait que $A(1, f(1)) \in T_{f,1}$ donc les coordonnées de ce point vérifient l'équation de la tangente, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} & y_A = 2x_A + p \\ \Leftrightarrow\ & f(1) = 2 \times 1 + p \\ \Leftrightarrow\ & 1 = 2 + p \\ \Leftrightarrow\ & p = -1 \end{aligned}$$

Ainsi l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 1 est :

$$T_{f,1} : \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Propriété 4 : Tangente horizontale

Soit f une fonction dérivable en $a \in \mathbb{R}$,
$\mathscr{C}_f$ possède une tangente horizontale au point d'abscisse a si, et seulement si, $f'(a) = 0$.

À savoir faire 4 : Déterminer l'équation d'une tangente

1. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction $f : x \mapsto x^2 - 2x$ au point d'abscisse 0.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2}{2} - x - 1$ au point d'abscisse 2.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ au point d'abscisse 1.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

Partie III Fonction dérivée

A - Dérivabilité sur un intervalle

Définition 5 : Dérivabilité sur un intervalle

Soient f une fonction définie sur $\mathscr{D}_f$ et $I \subset \mathscr{D}_f$ une partie de $\mathscr{D}_f$.
On dit que f est **dérivable sur *I*** si pour tout $x \in I$, f est dérivable en x.

Exemple :

Étudions le domaine dérivabilité de la fonction carré.
Considérons un réel a et étudions la dérivabilité de la fonction carré en a.

Pour cela, commençons par déterminer :

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &= \ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a que $2a$ est une valeur finie. Donc on vient de montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est une valeur finie, c'est-à-dire que pour tout $a \in \mathbb{R}$ f est dérivable en a. D'où f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

⚠ **Attention :** Une fonction n'est pas obligatoirement dérivable en tout point de son domaine de définition. En effet nous avons vu l'exemple de la valeur absolue définie en 0 mais non dérivable en 0.

Pour f une fonction dérivable sur un intervalle I, on associe à tout $a \in I$ le réel noté :

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Associé une valeur à un réel, c'est la définition d'une fonction. On définit la fonction que l'on appelle dérivée de f de la façon suivante : pour tout a tel que f soit dérivable en a on associe le nombre dérivé de f en a.

$$f' : a \mapsto f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Définition 6 : Fonction dérivée

Soit f une fonction dérivable sur I une partie de $\mathscr{D}_f$.
On appelle **fonction dérivée** de f sur I la fonction notée f' tel que : pour tout $x \in I$:

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

où $f'(x)$ est le nombre dérivé de f en x.

Exemple :

On vient de montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction carré f était dérivable en a tel que :

$$f'(a) = \ldots\ldots\ldots$$

On vient alors de déterminer l'expression algébrique de la fonction de la dérivée de la fonction carré. La fonction dérivée f' de la fonction carré est la fonction :

$$f' : \begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & f'(x) = \ldots\ldots\ldots\end{array}$$

B - Dérivées usuelles

Voici un tableau donnant l'expression de la fonction dérivée pour chacune des fonctions usuelles. Ce tableau est à connaître par cœur.

Famille	$f(x)$	Domaine de définition	$f'(x)$	Domaine de dérivabilité
Constante	k	....	....	....
Affine	$ax+b$	....	....	....
Carré	x^2	....	....	....
Cubique	x^3	....	....	....
Puissance ($n \in \mathbb{N}$)	x^n	....	....	....
Racine carrée	$\sqrt{x}$	....	....	....
Inverse	$\dfrac{1}{x}$	....	....	....
Puissance inverse	$\dfrac{1}{x^n} = x^{-n}$	....	....	....

À savoir faire 5 : Calcul de dérivée usuelle

Donner l'expression de $f'(x)$ pour chacune des fonctions f suivantes :

1. $f_1 : x \longmapsto 1$
2. $f_2 : x \longmapsto 0$
3. $f_3 : x \longmapsto 2x+3$
4. $f_4 : x \longmapsto \dfrac{2(x+2)}{\pi}$
5. $f_5 : x \longmapsto x^5$
6. $f_6 : x \longmapsto x^{2025}$
7. $f_7 : x \longmapsto x^{-2}$
8. $f_8 : x \longmapsto x^{-37}$
9. $f_9 : x \longmapsto \dfrac{1}{x^{14}}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

C - Opérations sur les fonctions dérivées

Maintenant que nous connaissons les dérivées des fonctions usuelles, amusons-nous avec les opérations élémentaires.

C.1 - Somme

Propriété 5 : Somme

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I, la fonction $f+g$ est dérivable sur I, et on a :

$$(f+g)' = \dots\dots\dots\dots\dots$$

Information : L'égalité $(f+g)' = f' + g'$ est une égalité de fonctions (sur I), c'est-à-dire que :

$$\text{Pour tout } x \in I,\ \ (f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Exemple :

Soit $f : x \mapsto x^4 + 2x + 5$,
Pour $x \in \mathbb{R}$, on peut décomposer $f(x)$ de la façon suivante : $f(x) = u(h) + v(x)$ où

$$u : x \mapsto \dots \quad \text{et} \quad v : x \mapsto \dots$$

Ainsi $f = u + v$ (égalité de fonctions).
Comme fonctions polynomiales u et v sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Alors comme .... f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f'(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

À savoir faire 6 : Dériver une somme

Donner l'expression de $f'(x)$ pour chacune des fonctions f suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto x^3 + \dfrac{x}{2} + 6$
2. $f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^4}$
3. $f_3 : x \mapsto \sqrt{x} + 2x + x^7$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

C.2 - Produit par un réel

Propriété 6 : Produit par un réel

Soient $k \in \mathbb{R}$ et f une fonction dérivable sur I, la fonction kf est dérivable sur I, et on a :

$$(kf)' = \text{..............}$$

Information : La fonction kf est tout simplement la fonction $x \mapsto kf(x)$.

Exemple :

Soit $f : x \mapsto \dfrac{5}{x}$,
Pour $x \in \mathbb{R}$ on peut décomposer $f(x)$ de la façon suivante : $f(x) = 5g(x)$ où

$$g : x \mapsto ...$$

Comme g est dérivable sur ......, alors f est dérivable sur ...... tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = \text{...}$$

À savoir faire 7 : Produit par un réel

1. $f_1 : x \mapsto 2\sqrt{x}$
2. $f_2 : x \mapsto \pi x^{-5}$
3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{\sqrt{2}}{3x^2}$
4. $f_4 : x \mapsto \sqrt{2x}$
5. $f_5 : x \mapsto \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{3}{x^7}$
6. $f_6 : x \mapsto 2 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{x^2}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

C.3 - Produit

Propriété 7 : Produit

Soient u et v une fonction dérivable sur I, la fonction uv est dérivable sur I, et on a :

$$(uv)' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Information : La fonction uv est tout simplement la fonction $x \mapsto u(x)v(x)$.

Erreur fréquente : À partir d'ici les formules se compliquent...
Attention ici nous n'avons pas :

$$\cancel{(uv)' = u'v'}$$

Pour s'en convaincre, voici une explication rapide :
pour toute fonction f on a $f = 1 \times f = hf$ où $h : x \mapsto 1$ et $h'(x) = 0$.
Si cette formule était vraie on aura alors :

$$f'(x) = h'(x)f'(x) = 0 \times f'(x) = 0$$

Et cela peu importe la fonction... ce qui est évidemment faux.

Exemple :

Soit $f : x \mapsto x\sqrt{x}$,
Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on peut décomposer $f(x)$ de la façon suivante : $f(x) = u(x)v(x)$ où

$$u : x \mapsto \ldots\ldots \quad \text{et} \quad v : x \mapsto \ldots\ldots$$

Comme u et v sont dérivables sur ...., alors f est dérivable sur .... tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

À savoir faire 8 : Dériver un produit

Donner l'expression de $f'(x)$ pour chacune des fonctions f suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto \left(x^5 + 2x^2 + 3\right)\left(x^3 + 2\right)$
2. $f_2 : x \mapsto \sqrt{\dfrac{5x}{9}} \times 2x^{-2}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

....
....
....
....
....
....
....

C.4 - Quotient

Propriété 8 : Inverse

Soit f une fonction dérivable sur I tel que pour tout $x \in I$: $f(x) \neq 0$, la fonction $\frac{1}{f}$ est dérivable sur I, avec :

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = \text{..............}$$

Exemple :

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$,
f est définie sur $\mathbb{R}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+1>0$.
Pour $x \in \mathbb{R}$, on peut décomposer $f(x)$ de la façon suivante : $f(x) = \frac{1}{g(x)}$ où

$$g : x \mapsto \text{......}$$

Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, ... et que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \text{.....................................}$$

À savoir faire 9 : Dériver l'inverse d'une fonction

Donner l'expression $f'(x)$ pour chacune des fonctions f suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto \frac{1}{x^2+x^3+x^4}$
2. $f_2 : x \mapsto \frac{1}{x^3+\sqrt{x}}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

....
....
....
....
....
....
....

Propriété 9 : Cas général

Soient u et v deux fonctions dérivables sur I tels que pour tout $x \in I : v(x) \neq 0$, la fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I, avec :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exemple :

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{x^2+1}$,
f est définie sur $\mathbb{R}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+1>0$.
Pour $x \in \mathbb{R}$, on peut décomposer $f(x)$ de la façon suivante : $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ où :

$$u : x \mapsto \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{et} \quad v : x \mapsto \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Comme $v(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$, f est dérivable comme fonction quotient sur ......, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

À savoir faire 10 : Dériver d'un quotient

Donner l'expression de $f'(x)$ pour chacune des fonctions f suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto \dfrac{x-4}{x-5}$
2. $f_2 : x \mapsto \dfrac{\frac{1}{x}+3}{2-\frac{3}{x}}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

C.5 - Composée avec une fonction affine

Définition 7 : Composée avec une fonction affine

Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D}_f$,
On dit que f est **la composée** d'une autre fonction g définie sur $\mathscr{D}_g$ avec une fonction affine $x \mapsto mx+p$ si pour tout $x \in \mathscr{D}_f$ on a $mx+p \in \mathscr{D}_g$ et :

$$\boldsymbol{f(x) = g(mx+p)}$$

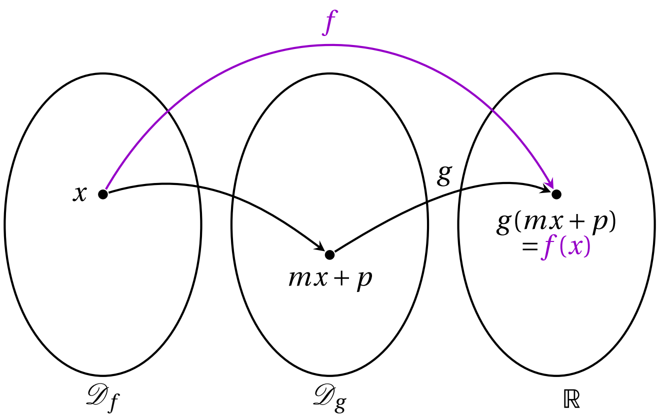
La situation se représente ainsi :

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{x} \arrow[r, mapsto] \arrow[rr, bend left, "\boldsymbol{f}"] & \boldsymbol{mx+p} \arrow[r, mapsto, "\boldsymbol{g}"] & \boldsymbol{g(mx+p)} \end{tikzcd}$$

À retenir : Les ensembles
Concernant les domaines de définitions il faut retenir que :

Pour $\boldsymbol{x \in \mathscr{D}_f}$ (*comme on veut calculer* $f(x)$) **il faut que $\boldsymbol{mx+p \in \mathscr{D}_g}$** (*comme on veut calculer* $g(mx+p)$).

Ce schéma résume le tout :



Exemple :

La fonction $f : x \mapsto (2x+5)^2$ définie sur $\mathscr{D}_f$, est la composée d'une fonction g et d'une fonction affine.
En effet en posant $g : x \mapsto$ ..... on a clairement pour tout $x \in \mathscr{D}_f$:

$$f(x) = g(2x+5)$$

De plus g est clairement définie sur $\mathbb{R}$, et on a bien pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $mx + p \in \mathbb{R}$ donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

À savoir faire 11 : Reconnaître la composition

Pour chacune des fonctions f suivantes, reconnaître les fonctions g et affines $x \mapsto mx + p$ tels que :

$$f(x) = g(mx+p)$$

On pourra également donner le domaine de définition de chacune des fonctions f.

1. $f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{2x-3}$
2. $f_2 : x \mapsto (-3x-5)^3$
3. $f_3 : x \mapsto \sqrt{-2x+5}$
4. $f_4 : x \mapsto \dfrac{x+2}{(x+4)^2+3}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Propriété 10 : Dérivée d'une composée avec fonction affine

Soient g une fonction dérivable sur I et J un intervalle.
Si pour tout $x \in J$, $mx+p \in I$ (avec $m, p \in \mathbb{R}$) **alors** la fonction f définie sur J par $f(x) = g(mx+p)$ est dérivable sur J, tel que pour tout $x \in J$:

$$f'(x) = \text{..}$$

Exemple :

Soit $f : x \mapsto \sqrt{2x+1}$,
On remarque que f est la composée de la fonction $g : x \mapsto$ ..... et de la fonction affine $x \mapsto$ ....
Comme g est dérivable sur ....., il nous faut déterminer l'ensemble des points x tels que : ....
Or on a :

$$\begin{aligned} & 2x+1>0 \\ \Leftrightarrow\ & 2x>-1 \\ \Leftrightarrow\ & x>-\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi la fonction f est dérivable sur .... et pour ces valeurs de x on a :

$$f'(x) = \text{..}$$

À savoir faire 12 : Dériver une composée avec une fonction affine

Donner l'expression de $f'(x)$ pour chacune des fonctions f suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{2x-3}$
2. $f_2 : x \mapsto (-3x-5)^3$
3. $f_3 : x \mapsto \sqrt{-2x+5}$
4. $f_4 : x \mapsto \dfrac{x+2}{(x+4)^2+3}$

On pourra s'intéresser au domaine de dérivabilité de chacune de ces fonctions.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Partie IV Exercices

A - Taux de variation

★★☆☆☆ **Exercice 1** (Taux de variation #1)

Dans chaque cas déterminer le taux de variation de f entre a et b :

1. $f_1 : x \mapsto 4x+3$ avec $a=-2$ et $b=5$.
2. $f_2 : x \mapsto 3x^2$ avec $a=1$ et $b=3$.
3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ avec $a=3$ et $b=6$.
4. $f_4 : x \mapsto x^2+x$ avec $a=2$ et $b=4$.

★★⯪☆☆ **Exercice 2** (Taux de variation #2)

Dans chaque cas déterminer le taux de variation de f entre a et b, en fonction de a et b :

1. $f_1 : x \mapsto 2x+5$ pour $x \in \mathbb{R}$.
2. $f_2 : x \mapsto 3-6x$ pour $x \in \mathbb{R}$.
3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{3}{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
4. $f_4 : x \mapsto 3x^2$ pour $x \in \mathbb{R}$.

★★⯪☆☆ **Exercice 3** (Sécante #1)

Soient $f : x \mapsto x^2-3x+7$, définie sur $\mathbb{R}$, et deux points A et B de $\mathscr{C}_f$ d'abscisses respectives 2 et 8.
Déterminer l'équation réduite de la sécante (AB).

★★⯪☆☆ **Exercice 4** (Sécante #2)

Soient $f : x \mapsto 5x+\dfrac{1}{x+1}$, définie sur $\mathbb{R}_+$, et trois points A, B et C de $\mathscr{C}_f$ d'abscisses respectives $0, 1$ et 3.
Déterminer l'équation réduite des sécantes (AB) et (AC).

B - Nombre dérivé

★★⯪☆☆ **Exercice 5** (Nombre dérivé et dérivabilité)

Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{x+2}$,

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que le taux de variation de f entre 1 et $1+h$ est égale à $-\dfrac{1}{3(3+h)}$ pour $h \neq 0$ et $h \neq -3$.
3. En déduire que f est dérivable en 1 et calculer $f'(1)$.

★★★☆☆ **Exercice 6** (Nombre dérivé)

Dans chaque cas déterminer le nombre dérivé de f en a :

1. $f_1 : x \mapsto 4x+3$ avec $a=-2$.
2. $f_2 : x \mapsto 3x^2$ avec $a=-1$
3. $f_3 : x \mapsto x^2(2+5x)$ avec $a=4$
4. $f_4 : x \mapsto \sqrt{x}$ avec $a=2$

★★☆☆☆ **Exercice 7** (Coefficient directeur)

Dans chaque cas déterminer le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en a :

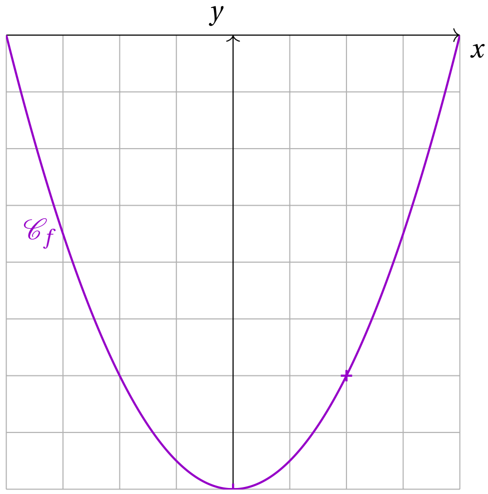
1. $f_1 : x \mapsto 2x+5$ avec $a=-2$.
2. $f_2 : x \mapsto x^2-4$ avec $a=-2$

★★★⯪☆ **EXERCICE 8** (Parallèle ?)

Soient $f : x \mapsto \dfrac{5}{x}$ et $a \in \mathbb{R}^*$. Démontrer que les tangentes à $\mathscr{C}_f$ aux points d'abscisses a et $-a$ sont parallèles.

★★⯪☆☆ **EXERCICE 9** (Graphique #1)

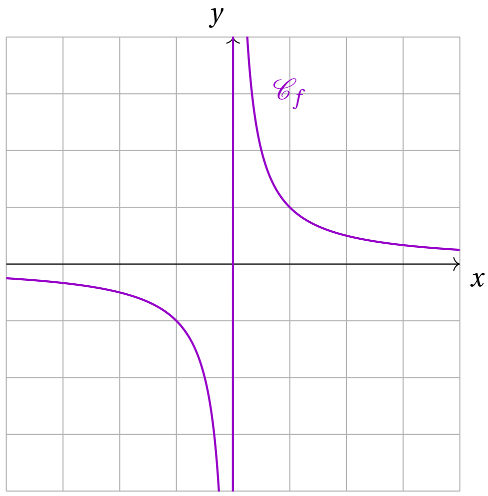
Dans le repère ci-dessous, on a tracé la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $[-4, 4]$.



1. Tracer la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2 sachant que $f'(2) = 2$.
2. Tracer la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -4 sachant que $f'(-4) = -4$.
3. Tracer la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 sachant que $f'(0) = 0$.

★★⯪☆☆ **EXERCICE 10** (Graphique #2)

Dans le repère ci-dessous, on a tracé la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

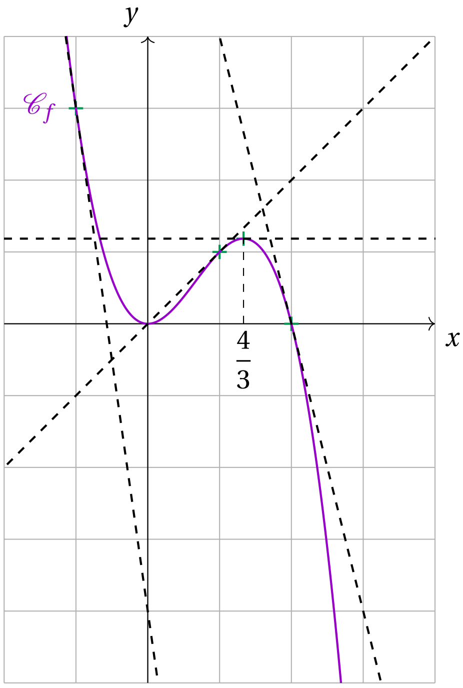


1. Tracer la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -2 sachant que $f'(-2) = \dfrac{1}{2}$.
2. Tracer la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 sachant que $f'(1) = -1$.
3. Tracer la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $-\dfrac{1}{2}$ sachant que $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{4}$.

C - Tangente à courbe

★★⯪☆☆ **Exercice 11** (Graphique #3)

Soit f définie et dérivable sur $[-3,5]$, dont on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ ci-dessous.



1. Déterminer graphiquement $f(-1), f(0), f(1)$ et $f(2)$.
2. Déterminer par lecture graphique $f'(-1), f'(1), f'\left(\frac{4}{3}\right)$ et $f'(2)$.
3. Donner l'équation des tangentes à la courbe au point d'abscisse 2 puis -1 puis 1.

★★☆☆☆ **Exercice 12** (Tangente en un point)

La droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 6x$ est la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse -2.
Déterminer $f'(-2)$ et $f(-2)$.

★★★★☆ **Exercice 13** (Tangentes)

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ passe par les points $A(-4,11), B(2,4)$ et $C(6,2)$. Les nombres dérivés de f en -4, en 2 et en 6 sont respectivement égaux à $-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}$ et $\frac{1}{2}$.
On appelle alors T_A, T_B et T_C les tangentes à $\mathscr{C}_f$ respectivement en A, B et C.

1. Déterminer l'équation réduite de chacune des tangentes T_A, T_B et T_C.
2. Les tangentes T_A, T_B et T_C sont-elles concourantes ? Si oui, en quel point ?

D - Calculs de dérivées

★★☆☆☆ **Exercice 14** (B.a-ba)

Donner l'expression de $f'(x)$ pour chacune des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto x^3$
2. $f_2 : x \mapsto \pi x - 7$
3. $f_3 : x \mapsto \frac{1}{3}$
4. $f_4 : x \mapsto \frac{1}{x^6}$
5. $f_5 : x \mapsto \left(\frac{1}{x}\right)^{11}$
6. $f_6 : x \mapsto (4x)^3$

★★☆☆☆ **EXERCICE 15** (Somme et produit par un réel)

Donner l'expression de $f'(x)$ pour chacune des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto x^3 + x^2 + \dfrac{1}{x} - 2x + 5$
2. $f_2 : x \mapsto -(9x-5) + \sqrt{x}$
3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x^4}$
4. $f_4 : x \mapsto \sqrt{8x}$
5. $f_5 : x \mapsto \dfrac{2x}{3} - \dfrac{3}{4x}$
6. $f_6 : x \mapsto x^{-4} - x^4$

★★★☆☆ **EXERCICE 16** (Produit)

Donner l'expression de $f'(x)$ pour chacune des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto (3x+5)(1-x)$
2. $f_2 : x \mapsto 2(-x^2+5x-8)(3x^2+7)$
3. $f_3 : x \mapsto \left(\dfrac{7}{x^4} - 2x^{-2}\right)\left(5x^4 + \dfrac{1}{x}\right)$
4. $f_4 : x \mapsto x\sqrt{x}$

★★★★☆ **EXERCICE 17** (Quotient)

Donner l'expression de $f'(x)$ pour chacune des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{3x-5}$
2. $f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$
3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{3}{4\sqrt{x} + x^{-2}}$
4. $f_4 : x \mapsto \dfrac{1}{3x+5x^3+7x^5}$
5. $f_5 : x \mapsto \dfrac{x+2}{5x-3}$
6. $f_6 : x \mapsto \dfrac{6x^2+5x+4}{3x^2+2x+1}$
7. $f_7 : x \mapsto \dfrac{\sqrt{2x} - x}{x^2+5x^{-3}}$
8. $f_8 : x \mapsto \dfrac{\frac{1}{x}+2}{\sqrt{3x}}$

★★★½☆ **EXERCICE 18** (Composée avec une fonction affine)

Donner l'expression de $f'(x)$ pour chacune des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto \sqrt{5x+2}$
2. $f_2 : x \mapsto \sqrt{-9x+8}$
3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{-9x+8}$
4. $f_4 : x \mapsto \dfrac{1}{(2x+1)^3}$
5. $f_5 : x \mapsto (3x+5)^4$
6. $f_6 : x \mapsto (-x+2)^{-3}$

★★★☆☆ **EXERCICE 19** (Composition affine #1)

On considère une fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par $f : x \mapsto \dfrac{1}{2x} - 3x + 5$ et deux fonctions g et h tels que :

$$g : x \mapsto f(x-2) \quad \text{et} \quad h : x \mapsto f(1+2x)$$

1. Que vaut $g(x)$? $h(x)$?
2. Que vaut $g'(x)$? $h'(x)$?

★★★☆☆ **EXERCICE 20** (Composition affine #2)

On considère une fonction f, définie par $f : x \mapsto \dfrac{2x}{3x^2+1}$ et deux fonctions g et h tels que :

$$g : x \mapsto f(x-2) \quad \text{et} \quad h : x \mapsto f(1+2x)$$

1. Que vaut $g(x)$? $h(x)$?
2. Que vaut $g'(x)$? $h'(x)$?

★★★☆☆ **EXERCICE 21** (Composition affine #3) ....

On considère une fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par $f : x \mapsto \dfrac{2}{x} + x$ et deux fonctions g et h tels que :

$$g : x \mapsto f(x-2) \quad \text{et} \quad h : x \mapsto f(1+2x)$$

1. Que vaut $g(x)$? $h(x)$?
2. Que vaut $g'(x)$? $h'(x)$?

★★★✯☆ **EXERCICE 22** (Composition affine et dérivabilité) ....

Soit $f : x \mapsto \sqrt{2x+8}$

1. Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité de f.
2. Déterminer l'expression de la fonction dérivée de f.
3. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -2 puis 5.

★★★☆☆ **EXERCICE 23** (Un peu de physique) ....

On considère que la position d'un objet M dans un repère orthonormé au cours du temps est donné par une fonction de t (le temps) :

$$f : t \mapsto t^3 - 2t^2 + 7$$

La dérivée de la position $f(t)$, par rapport à t, donne la vitesse instantanée, $v(t)$, de notre objet. La dérivée de sa vitesse instantanée, $v(t)$, donne l'accélération, $a(t)$, de notre objet.

1. Déterminer la position, la vitesse et l'accélération de M au temps $t = 0$.
2. Déterminer la position, la vitesse et l'accélération de M au temps $t = 1$.