

---

# Étude des polynômes du second degré

---

## Plan du chapitre

---

<b>I</b>	<b>Résolution d'une équation du second degré .....</b>	<b>2</b>
<b>II</b>	<b>Factorisation et étude de signes .....</b>	<b>5</b>
<b>III</b>	<b>Exercices .....</b>	<b>10</b>
	A - Second degré .....	10
	B - Factorisation et étude de signe .....	10
	C - Pour aller plus loin .....	11

---

## Partie I Résolution d'une équation du second degré

### Définition 1 : Équation du second degré

Une **équation du second degré** est une équation de la forme  $ax^2 + bx + c = 0$  où  $a, b$  et  $c \in \mathbb{R}$  avec  $a \neq 0$ .

#### Exemple :

L'équation  $-2x^2 + 3x - 1 = 0$  est une équation du second degré.

### Définition 2 : Discriminant

On appelle **discriminant** de l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$ , le nombre :

$$\Delta = \dots\dots\dots$$

#### Exemple :

Le discriminant associé à l'équation du second degré précédente est égale à :

$$\begin{aligned} \Delta &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots \\ &= \dots \end{aligned}$$

### Propriété 1 : Solutions

Considérons  $\Delta$  le discriminant associé à l'équation  $(E) : ax^2 + bx + c = 0$  ;

- Si  $\Delta < 0$  alors l'équation  $(E)$  n'admet pas de solution réelle ;
- Si  $\Delta = 0$  alors l'équation  $(E)$  admet une unique solution  $x_0 = \dots\dots\dots$
- Si  $\Delta > 0$  alors l'équation  $(E)$  admet deux solutions distinctes  $x_1 = \dots\dots\dots$  et  $x_2 = \dots\dots\dots$

### ⚡ À retenir : Abus de langage

Il pourra arriver que nous fassions un abus de langage en parlant de discriminant associé à un polynôme et non associé à une équation comme défini précédemment. Dans ce cas il faudra bien se rappeler que nous faisons référence au discriminant associé à l'équation de premier membre notre polynôme et de second membre nul.

#### Exemple :

En reprenant la même équation du second degré que les exemples précédents, on sait que le discriminant de cette équation est :  $\Delta = 1 > 0$  ainsi on sait que cette équation admet deux solutions distinctes qui sont :

$$\begin{aligned} x_1 &= \dots\dots\dots \quad \text{et} \quad x_2 = \dots\dots\dots \\ x_1 &= \dots\dots\dots \quad \text{et} \quad x_2 = \dots\dots\dots \\ x_1 &= \dots\dots \quad \text{et} \quad x_2 = \dots\dots \end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation du second degré considérée au départ est :  $\dots\dots\dots$

### ⚡ À retenir : Le principe de la preuve

L'idée de la preuve de cette propriété est simple, jusqu'ici pour résoudre des équations du second degré comme

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

Vous utilisiez sans cesse la factorisation pour appliquer la propriété du produit nul. Ici nous allons faire de même, nous allons chercher à factoriser notre polynôme du second degré pour obtenir une équation produit nul pour ensuite déterminer facilement les solutions de notre équation.

**Démonstration :**

Considérons l'équation du second degré suivante :  $(E) : ax^2 + bx + c = 0$  où  $a, b$  et  $c \in \mathbb{R}$  avec  $a \neq 0$ .  
Cherchons à factoriser le polynôme :  $ax^2 + bx + c$ . Dans le premier chapitre sur les polynômes du second degré, nous avons commencé à factoriser ces fonctions en passant par la forme canonique associée. Ainsi on a :

$$ax^2 + bx + c = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$$

On reconnaît ici  $\Delta = b^2 - 4ac$ ;

$$ax^2 + bx + c = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

Ainsi l'équation :  $(E)$  est équivalente à :

$$\begin{aligned} a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] &= 0 \\ \Leftrightarrow \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} &= 0 \quad \text{car } a \neq 0 \end{aligned}$$

Plusieurs cas s'offrent à nous :

- Si  $\Delta < 0$  alors l'équation  $(E)$  n'admet aucune solution en effet :

$$(E) \Leftrightarrow \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

Or cette dernière équation n'admet aucune solution car  $\frac{\Delta}{4a^2} < 0$ .

On a alors :  $S = \emptyset$

- Si  $\Delta = 0$  alors de la même manière que précédemment on a :

$$\begin{aligned} (E) \Leftrightarrow \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{b}{2a} \end{aligned}$$

Ainsi l'équation  $(E)$  possède comme ensemble des solutions :  $S = \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$

- Si  $\Delta > 0$  alors  $\sqrt{\Delta}$  est définie, on a alors :

$$\begin{aligned} (E) \Leftrightarrow \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left( x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left( x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \left( x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left( x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Comme équation produit nul, on a alors :

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x &= -\frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble des solutions de notre équation  $(E)$  est  $S = \left\{ \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$



**Définition 3 : Racines**

Pour une fonction polynomiale de degré deux,  $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ , les solutions de l'équation  $f(x) = 0$  sont aussi appelées **racines** de la fonction  $f$ .

**À retenir : Racine double**

Dans le cas où  $\Delta = 0$ , on appelle l'unique solution de notre équation **racine double** de notre fonction polynomiale du second degré

**Exemple :**

- Les racines du polynôme  $P_1(x) = x^2 - 2x - 3$  sont : .....
- Les racines du polynôme  $P_2(x) = -3x^2 + 4x + 1$  sont : .....
- Les racines du polynôme  $P_3(x) = 2x(x + 1) - x^2 - 3x$  sont : .....

**Partie II Factorisation et étude de signes**

La démonstration précédente montre un peu plus que l'existence (ou non) de solution pour une équation du second degré donnée elle montre même qu'un polynôme du second degré peut être factorisé dans certains cas. En effet dans les cas où  $\Delta \geq 0$ , nous avons pu donner une forme factorisée de notre polynôme du second degré.

- $\Delta > 0 : ax^2 + bx + c = a \left( x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left( x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right)$  où  $\Delta = b^2 - 4ac$ , ce qui est la forme factorisée de notre polynôme;
- $\Delta = 0 : ax^2 + bx + c = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2$ , ce qui est la forme factorisée de notre polynôme.

**Théorème 1 : Factorisation**

Soient  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tels que  $a \neq 0$ .

Le polynôme du second degré  $ax^2 + bx + c$  se factorise éventuellement de la façon suivante :

- Si  $\Delta > 0$ ,  $ax^2 + bx + c = \dots\dots\dots$  où  $x_1$  et  $x_2$  sont les racines de notre polynôme;
- Si  $\Delta = 0$ ,  $ax^2 + bx + c = \dots\dots\dots$  où  $x_0$  est la racine double de notre polynôme;
- Si  $\Delta < 0$ , alors notre polynôme n'a pas de forme factorisée sur  $\mathbb{R}$ .

**Démonstration :**

Voir démonstration précédente ■

**À retenir :** Si  $a$  est une racine d'un polynôme  $P$  alors  $P$  est factorisable par  $x - a$ .

**Exemple :**

En reprenant l'exemple suivi tout au long du chapitre, factorisons le trinôme :  $-2x^2 + 3x - 1$ .  
On a vu que  $\Delta = 1 > 0$ , donc notre polynôme est bien factorisable. De plus, nous avons vu qu'il admettait deux racines réelles distinctes qui sont :

$$x_1 = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

On obtient alors la forme factorisée suivante :

$$-2x^2 + 3x - 1 = \dots\dots\dots$$



**Information :** Comme nous l'avons déjà vu en seconde, l'utilité principale d'une forme factorisée est d'étudier le signe d'une fonction polynomiale. En effet :

Dans le cas où  $\Delta > 0$ , on a alors notre fonction polynomiale  $f$  qui admet une forme factorisée telle que :  $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$  où  $x_1$  et  $x_2$  sont les racines de  $f$ . On a alors, (ici on va supposer que  $x_1 < x_2$ )

$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$	
$a$	signe( $a$ )				
$x - x_1$	-	0	+	+	
$x - x_2$	-	-	0	+	
Signe de $f(x)$	signe( $a$ )	0	-signe( $a$ )	0	signe( $a$ )

**Théorème 2 : Signe**

Soit  $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$  une fonction polynômiale du second degré.

Le signe de cette fonction du signe du discriminant associé à cette fonction polynomiale et du signe de  $a$ , le coefficient quadratique :

- Si  $\Delta > 0$ , alors la fonction polynomiale est du signe de  $a$  sur ..... et du signe contraire de  $a$  sur .....
- Si  $\Delta = 0$ , alors la fonction polynomiale est toujours du signe de  $a$ , elle s'annule sans changer de signe;
- Si  $\Delta < 0$ , alors la fonction polynomiale est toujours du signe de  $a$ , sans s'annuler.

**À retenir :** On retiendra que :

- Si  $\Delta > 0$  alors notre polynôme est du signe de  $a$  à l'extérieur de ses racines;
- Si  $\Delta = 0$  alors notre polynôme est toujours du signe de  $a$ . Il s'annule sans changer de signe, en son unique racine;
- Si  $\Delta < 0$  alors notre polynôme est toujours du signe de  $a$ .

**Exemple :**

Toujours en conservant la même fonction polynomiale du second degré,  $P : x \mapsto -2x^2 + 3x - 1$ .

Nous avons vu que les racines de notre polynôme sont :  $x_1 = 1$  et  $x_2 = \frac{1}{2}$  (on fera attention ici :  $x_1 > x_2$ !).

De plus le signe du coefficient quadratique est négatif, donc par le théorème précédent on a alors :

$x$	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
Signe de $P(x)$		0	0	

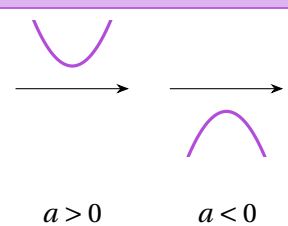
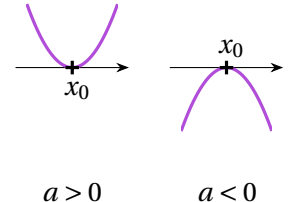
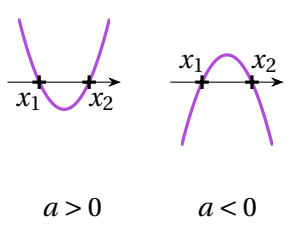
**À savoir faire 3 : Résoudre des inéquations du second degré**

- Résoudre l'inéquation :  $3x^2 - 2x + 1 \geq 0$

.....  
 .....

- Résoudre l'inéquation :  $-3x^2 - x + 2 \leq 0$

## Tableau récapitulatif

	Solutions de $ax^2 + bx + c = 0$	Tableau de signes de $P(x) = ax^2 + bx + c$	Forme factorisée de $P(x) = ax^2 + bx + c$	Position relative de la parabole par rapport à l'axe des abscisses											
$\Delta < 0$	Pas de solution dans $\mathbb{R}$	<table border="1"> <tr> <td><math>x</math></td> <td><math>-\infty</math></td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td><math>P(x)</math></td> <td colspan="2">signe de <math>a</math></td> </tr> </table>	$x$	$-\infty$	$+\infty$	$P(x)$	signe de $a$		Pas de factorisation possible	 $a > 0$ $a < 0$					
$x$	$-\infty$	$+\infty$													
$P(x)$	signe de $a$														
$\Delta = 0$	Une solution dans $\mathbb{R}$ $x_0 = -\frac{b}{2a}$	<table border="1"> <tr> <td><math>x</math></td> <td><math>-\infty</math></td> <td><math>-\frac{b}{2a}</math></td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td><math>P(x)</math></td> <td>signe de <math>a</math></td> <td>0</td> <td>signe de <math>a</math></td> </tr> </table>	$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$	$P(x)$	signe de $a$	0	signe de $a$	$P(x) = a(x - x_0)^2$	 $a > 0$ $a < 0$			
$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$												
$P(x)$	signe de $a$	0	signe de $a$												
$\Delta > 0$	Deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$ $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	<table border="1"> <tr> <td><math>x</math></td> <td><math>-\infty</math></td> <td><math>x_1</math></td> <td><math>x_2</math></td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td><math>P(x)</math></td> <td>signe de <math>a</math></td> <td>0</td> <td>signe de <math>-a</math></td> <td>0</td> <td>signe de <math>a</math></td> </tr> </table>	$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$	$P(x)$	signe de $a$	0	signe de $-a$	0	signe de $a$	$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	 $a > 0$ $a < 0$
$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$											
$P(x)$	signe de $a$	0	signe de $-a$	0	signe de $a$										

## Partie III Exercices

### A - Second degré

★★☆☆☆ EXERCICE 1 (Discriminant) ..... (L)

Calculer le discriminant et donner le nombre de solution de chacune des équations suivantes :

1.  $x^2 - x + 1 = 0$

3.  $5x^2 + 4x + 3 = 0$

2.  $2x^2 - x + 3 = 0$

4.  $x^2 - \sqrt{2}x + 7 = 0$

★★★☆☆ EXERCICE 2 (Équation du second degré) ..... (J)

Résoudre les équations du second degré suivantes :

1.  $x^2 + x + 1 = 0$

5.  $3x^2 - 2x - 1 = 0$

9.  $-5x^2 - 3x + 2 = 0$

2.  $x^2 + x - 6 = 0$

6.  $-x^2 + 3x + 9 = 0$

10.  $4x^2 + 12x + 4 = 0$

3.  $x^2 + 5x - 6 = 0$

7.  $\frac{x^2}{2} + 2x + 9 = 0$

11.  $x^2 - 2 = 0$

4.  $x^2 + x - 2 = 0$

8.  $-2x^2 + 3x + 4 = 0$

12.  $-3x^2 - 4x = 0$

★★★★☆ EXERCICE 3 (Équation) ..... (K)

Résoudre les équations suivantes :

1.  $x(2x + 1) = x^2 - 3$

4.  $x - \frac{1}{x} = 0$

7.  $\frac{x^2 + 4x - 1}{x + 1} = 3x + 1$

2.  $x^3 - 5x^2$

5.  $\frac{x + 1}{2} + \frac{1}{x - 4} = 1$

8.  $\frac{1}{x - 1} - \frac{4}{x + 2} = -\frac{5}{3}$

3.  $\frac{2x^2 + 3x - 5}{x - 1} = 0$

6.  $\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 2} = 4$

9.  $\frac{3}{x + 2} - \frac{1}{x^2 - 4} = \frac{1}{2}$

### B - Factorisation et étude de signe

★★☆☆☆ EXERCICE 4 (Racines) ..... (L)

Déterminer les racines de chacune des fonctions polynomiale suivante :

1.  $f(x) = (x - 2)(x + 1)$

3.  $f(x) = (2 - x)(1 - 3x)$

5.  $f(x) = 4(2x + 7)^2$

2.  $f(x) = (2x + 3)(x + 2)$

4.  $f(x) = 2(x - 1)(x + 1)$

6.  $f(x) = (x - 2)(1 - x)(-4x + 1)$

★★★★☆ EXERCICE 5 (Factorisation) ..... (J)

Factoriser, si possible, les trinômes suivants :

1.  $f(x) = x^2 + x + 1$

3.  $f(x) = x^2 - x - 1$

5.  $f(x) = \frac{x^2}{2} + 2x + 9$

2.  $f(x) = -x^2 + 3x + 9$

4.  $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$

6.  $f(x) = 4x^2 + 12x + 4$

★★★☆☆ EXERCICE 6 (Inéquation) ..... (↺)

Résoudre les inéquations suivantes :

- |                         |                              |                           |
|-------------------------|------------------------------|---------------------------|
| 1. $x^2 + x - 6 \geq 0$ | 3. $16x^2 - 40x + 25 \leq 0$ | 5. $-x^2 + 3x + 9 \geq 0$ |
| 2. $-2x^2 + 3x + 4 > 0$ | 4. $-5x^2 - 3x + 2 > 0$      | 6. $-3x^2 + 5x + 8 < 0$   |

★★★★☆ EXERCICE 7 (Inéquation #2) ..... (↺)

Résoudre les inéquations suivantes :

- |   |                                    |
|---|------------------------------------|
| 1. $-5x^2 > (-3x + 1)(x + 2)$           | 3. $4(x - 3)^2 \geq (7 + 4x)^2$    |
| 2. $(x + 1)(x^2 + 3) > (x + 1)(5x - 3)$ | 4. $(-3x^2 + x + 2)(x + 3) \geq 0$ |

★★★★☆ EXERCICE 8 (La factorisation à la rescousse) ..... (↺)

Résoudre les équations suivantes en factorisant :

- |   |   |
|---|---|
| 1. $(x + 1)^2 - (2x + 3)^2 = 0$         | 4. $81 - (x^2 + 6x + 9) = 0$                |
| 2. $x^2 + 2x + 1 + (2x - 3)(x + 1) = 0$ | 5. $(3x - 1)(2x + 5) - (1 - x)(2x + 5) = 0$ |
| 3. $x^2 - 16 + (x + 4)(x - 6) = 0$      | 6. $(2x + 3)^2 - 2(2x + 3) + 1 = 0$         |

**C - Pour aller plus loin**

★★★★☆ EXERCICE 9 (Équation à paramètre) ..... (↺)

Pour  $m \in \mathbb{R}$ , discuter du nombre de solutions de l'équation suivante :

$$x^2 - mx - 3x + 3x + 1 = 0$$

★★★★☆ EXERCICE 10 (Degré 4) ..... (⊥)

Résoudre les équations suivantes en posant  $X = x^2$

- |                            |                          |
|----------------------------|--------------------------|
| 1. $x^4 - 84x^2 + 243 = 0$ | 3. $3x^4 + 5x^2 + 2 = 0$ |
| 2. $x^4 + 8x^2 - 9 = 0$    | 4. $-x^4 + x^2 + 2 = 0$  |

★★★★★ EXERCICE 11 (Avec radical) ..... (↺)

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :

- |                             |                         |  |
|-----------------------------|-------------------------|--|
| 1. $x - 5\sqrt{x} - 14 = 0$ | 2. $\sqrt{x+5} = 1 - x$ | 3. $\sqrt{x^2 - x - 6} = \sqrt{x - 1}$ |
|-----------------------------|-------------------------|--|