

Généralités sur les suites

Plan du chapitre

I	Notion de suite	2
	A - Définitions	2
	B - Représentation graphique	4
II	Les différentes façons de définir une suite	5
	A - Suite définie par extension	5
	B - Suite définie explicitement	5
	C - Suite définie par récurrence	7
III	Étude graphique du comportement à l'infini d'une suite	8
	A - Premiers exemples introductifs	8
	B - Convergence des suites récurrentes	10
IV	Sens de variation d'une suite	14
	A - Définitions	14
	B - Étude du sens de variation	16
V	Exercices	19
	A - Généralités sur les suites	19
	B - Convergence des suites récurrentes	20
	C - Sens de variation d'une suite	21

Introduction

Jusqu'ici vous avez été confronté à des fonctions définies sur \mathbb{R} ou du moins sur une partie, un intervalle de \mathbb{R} . Ce chapitre va introduire les fonctions définies sur \mathbb{N} , ou alors une partie de \mathbb{N} . Ces fonctions, qui se nomment les suites, décrivent les phénomènes qui se déroulent sur un temps discret. Comme la température d'une ville chaque jour, les bénéfices d'une entreprise chaque année. Contrairement aux fonctions "classique" que vous avez étudié jusqu'ici, définies sur \mathbb{R} , qui décrivent des phénomènes continus. La position d'un objet au cours du temps...

Partie I Notion de suite

A - Définitions

Définition 1 : Intervalle entier

Soit $a, b \in \mathbb{N}$ tel que $a < b$, Un intervalle de \mathbb{N} noté $\llbracket a, b \rrbracket$ est défini par :

$$\llbracket a, b \rrbracket = [a, b] \cap \mathbb{N} = \{a, a+1, \dots, b-1, b\}$$

Exemple :

$$\llbracket 2, 6 \rrbracket = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

À retenir :

- L'intervalle entier $\llbracket a, b \rrbracket$ est l'ensemble des nombres entiers compris entre a et b . La différence avec $[a, b]$ est que dans celui ci nous prenons tous les nombres réels, alors que dans l'intervalle entier uniquement les nombres entiers...
- On a clairement $\llbracket a, b \rrbracket \subset [a, b]$.
- Dans l'exemple précédent on a : $\pi \in [2, 6]$, cependant : $\pi \notin \llbracket 2, 6 \rrbracket$. En effet : π n'est pas un nombre entier.
- On évitera les écritures : $\llbracket 3, 8 \rrbracket$ étant donné que l'on peut écrire plus simplement : $\llbracket 4, 8 \rrbracket$.

Information : Pour $n_0 \in \mathbb{N}$, l'intervalle : $\llbracket n_0, +\infty[$ est un intervalle de \mathbb{N} dit **non borné**.

On a : $\llbracket n_0, +\infty[= \{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots\} = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$.

Exemple :

L'intervalle non borné : $\llbracket 2, +\infty[= \{2, 3, 4, 5, \dots\}$

À savoir faire 1 : Intervalles entier

1. Décrire $\llbracket 1, 9 \rrbracket$ sous la forme d'un ensemble à accolade :
2. Décrire $\{2, 3, 4\}$ sous la forme d'un intervalle d'entiers :
3. Décrire $\llbracket 3, 19 \rrbracket \cap \llbracket 11, 21 \rrbracket$ sous la forme d'un ensemble à accolade :
4. Décrire $\{9, 10, 11, 2, 3\}$ sous la forme d'union d'intervalle d'entiers :
5. Décrire $\llbracket 103, 105 \rrbracket \cup \llbracket 58, 60 \rrbracket$ sous la forme d'un ensemble à accolade :

Définition 2 : Suite

Une suite est une fonction définie sur un intervalle non bornée de \mathbb{N} .

La suite $(u_n)_{n \in I}$ (ou simplement u) est une fonction définie sur I un intervalle non bornée de \mathbb{N} tel que :

$$\begin{array}{l} u: I \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad | \quad n \longmapsto u(n) = u_n \end{array}$$

On appelle également I l'**ensemble des indices** de notre suite u .

u_n (lire "hue aine") est le **terme d'indice** n ou **terme général** de la suite u .

Exemple :

- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par son terme général $u_n = \frac{1}{1+n}$ est telle que $u_0 = 1, u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = \frac{1}{3}, \dots$
 Cette suite est définie sur \mathbb{N} tout entier, elle n'a pas de valeur interdite. L'ensemble des indices de notre suite est : \mathbb{N} .
- L'ensemble des températures relevée chaque jour à Lyon à partir du 1^{er} janvier 2000 est une suite qui, à priori, ne possède pas de terme général.

✂ À savoir faire 2 : Calculer des termes, déterminer l'ensemble des indices d'une suite.

1. On considère la suite v définie par son terme général : $v_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

(a) Déterminer le terme d'indice 1, puis d'indice 5.

.....

(b) Quelle est la valeur de u_7 ?

.....

(c) Donner l'ensemble des indices de cette suite.

.....

.....

.....

.....

2. On considère la suite des entiers positifs impairs : $u_1 = 1, u_2 = 3, \dots$

Déterminer le terme d'indice 5. Que vaut u_{12} ?

.....

.....

.....

3. Compléter la suite inventée par le mathématicien **John CONWAY**, surnommée *suite look and say* :

$$u_1 = 1, u_2 = 11, u_3 = 21, u_4 = 1211, \dots$$

.....

4. Donner le premier terme de la suite $(x_n)_n$ définie comme étant la suite des solutions positives de l'équation :

$$x^3 + 3x = n$$

.....

.....

.....

.....

Information : On peut faire des parallèles entre les suites et les fonctions (évidemment étant donné qu'une suite est une fonction particulière). Voici un tableau faisant ces parallèles :

	Fonction	Suite
Nom	f	u ou $(u_n)_n$
Variable	x	n
Définition	Partie de \mathbb{R}	Intervalle non borné de \mathbb{N}
Expression générale	$f(x)$	$u(n) = u_n$
Applications	Modélisation continue (temps, espace...)	Modélisation discrète (évolution par étapes, finances, population...)

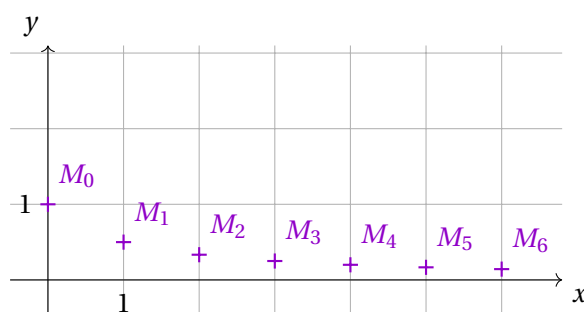
B - Représentation graphique

De la même manière que les fonctions, les suites ont une représentation graphique. À la seule différence qu'une fonction possède une courbe représentative, c'est-à-dire l'ensemble des points représentant la fonction est un ensemble continu (ce qui trace justement la courbe). Ici les suites vont avoir un ensemble discret donc nous n'appellerons pas courbe représentative de la suite mais plutôt le nuage de points associé à notre suite.

Dans un repère, la représentation graphique de la suite u est l'ensemble des points M_n de coordonnées (n, u_n) où n parcourt l'ensemble des indices de la suite u .

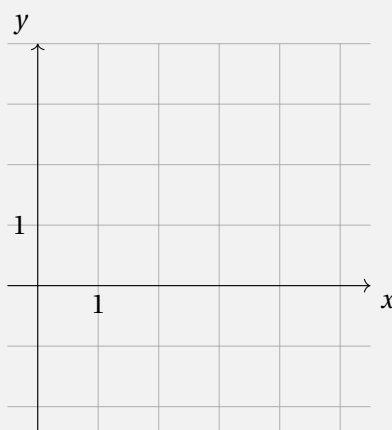
Exemple :

Représentons les premiers termes de la suite $(u_n)_n$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par : $u_n = \frac{1}{n+1}$.



À savoir faire 3 : Représenter graphiquement une suite

Déterminer puis représenter graphiquement les 5 premiers termes de la suite $(u_n)_n$ définie par : $u_n = -1 + \frac{n}{2}$



Partie II Les différentes façons de définir une suite

A - Suite définie par extension

Définition 3 : Par extension

Une suite est définie **par extension** si tous ses termes successifs sont donnés, tous les termes sont donnés dans un ensemble.

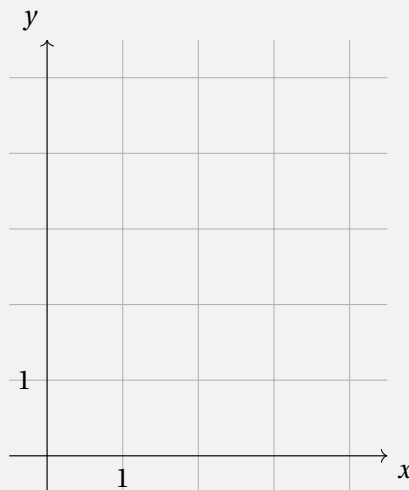
Information : Une suite réelle peut également être définie comme étant un ensemble de nombre.

Exemple :

Une série statistique par exemple, nous pouvons prendre par exemple le nombre de buts par match d'un club de foot. Ici nous définirions notre suite par extension.

✂ À savoir faire 4 : Représenter graphiquement une suite #2

Représenter graphiquement les 5 premiers termes de la suite des décimales de π .



B - Suite définie explicitement

Définition 4 : Formule explicite

Soit f une fonction définie sur \mathcal{D}_f .

Une suite $(u_n)_n$ est définie par une **formule explicite** si son terme général u_n peut s'exprimer en fonction de n , c'est-à-dire :

$$u_n = f(n) \quad \text{avec } n \in \mathcal{D}_f \cap \mathbb{N}$$

Exemple :

Considérons la suite $(u_n)_n$ définie par : $u_n = \sqrt{n - \frac{3}{2}}$, cette suite est définie explicitement. En effet son terme général ne dépend que de n .

On peut définir u_n à l'aide de la fonction : $f : x \mapsto \sqrt{x - \frac{3}{2}}$, car dans ce cas on a bien : $u_n = f(n)$.

Comme la fonction f est définie sur $[\frac{3}{2}, +\infty[$, on peut alors affirmer que l'ensemble des indices de notre suite $(u_n)_n$ est : $[\frac{3}{2}, +\infty[\cap \mathbb{N} = \llbracket 2, +\infty[$.

Voici le nuage de points de notre suite (et en pointillé le graphe de la fonction f) :

C - Suite définie par récurrence

Définition 5 : Par récurrence

Une suite $(u_n)_n$ est définie par une **formule de récurrence** si son terme général u_n s'exprime en fonction de termes précédents.

Exemple :

- La suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$ est un exemple de suite définie par récurrence. On dira qu'elle est définie par une **récurrence d'ordre 1**, en effet elle ne dépend que du terme précédent.
- La suite $(v_n)_n$ définie par : $\begin{cases} v_0 = -2 \\ v_n = 4v_{n-1} + 5 \end{cases}$ est une suite définie par récurrence d'ordre 1.
- La suite $(w_n)_n$ définie par : $\begin{cases} w_0 = 1 \\ w_1 = 1 \\ w_{n+2} = w_{n+1} + w_n \end{cases}$ est également une suite définie par récurrence mais cette fois ci d'ordre 2 car le terme général dépend des termes précédents.

À retenir : Cette fois ci notre terme général est une fonction des termes précédents et non pas de son indice.

Définition 6 : Suite récurrente d'ordre un

Une suite $(u_n)_n$ définie à partir d'un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ est récurrente d'ordre un, si elle est définie par la donnée :

- d'une relation de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$, qui permet de calculer à partir de chaque terme le terme suivant.
- du premier terme $u_{n_0} \in \mathcal{D}_f$.

Ainsi :

$$\begin{cases} u_{n_0} \in \mathcal{D}_f \\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ et } u_n \in \mathcal{D} \text{ pour tout } n \geq n_0 \end{cases}$$

Point chaud : On impose que $u_n \in \mathcal{D}_f$ pour tout $n \geq n_0$ afin de pouvoir regarder $f(u_n)$, sinon celui-ci ne serait pas défini. Cette année ce sera sous-entendu que $u_n \in \mathcal{D}_f$ pour tout $n \geq n_0$ dans nos exercices.

Exemple :

Considérons la suite récurrente suivante : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ où $f : x \mapsto \sqrt{x-2}$.
 On a $\mathcal{D}_f = [2, +\infty[$, on a bien $u_0 \in \mathcal{D}_f$ donc $u_1 = f(u_0) = \sqrt{u_0-2} = \sqrt{2-2} = \sqrt{0} = 0 \notin \mathcal{D}_f$.
 D'où u_2 n'est pas définie et même pour tout $n \geq 2$ u_n n'est pas définie.
 L'ensemble des indices de cette suite est donc : $\{0, 1\}$.

À savoir faire 6 : Calculer des termes d'une suite définie par récurrence.

Déterminer les trois premiers termes des suites récurrentes définies dans l'exemple précédent.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

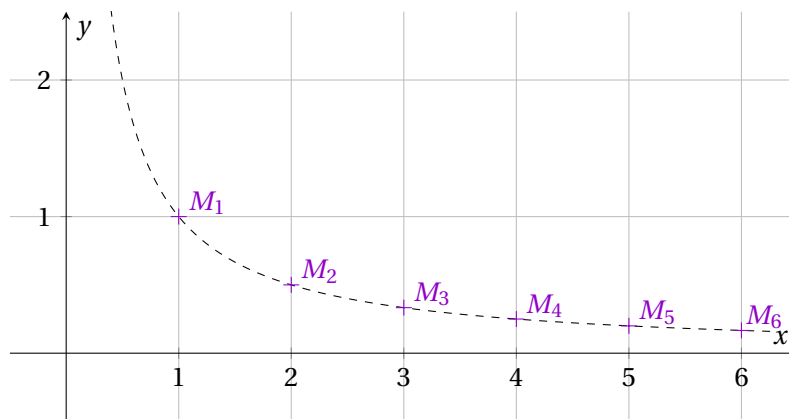
.....

Partie III Étude graphique du comportement à l'infini d'une suite

A - Premiers exemples introductifs

Exemple :

Considérons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $u_n = \frac{1}{n}$, nous représentons graphiquement cette suite ci-dessous :



Nous observons sur ce graphique que plus n devient grand, plus le réel u_n se rapproche de 0.

Définition 7 : Limite

On dit que la suite $(u_n)_n$ **converge** vers une **limite** $L \in \mathbb{R}$ lorsque n tend vers ∞ , si les valeurs de u_n peuvent être aussi proche de L que l'on veut pourvu que n soit suffisamment grand.

On note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ et on lit : *la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$ est égale à L .*

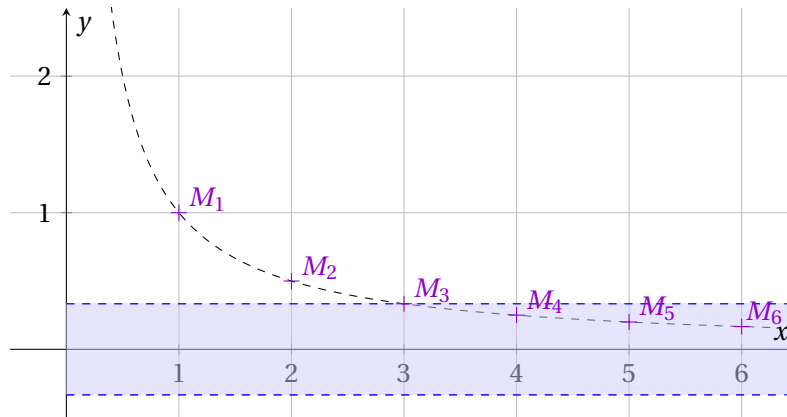
On dit alors que la suite $(u_n)_n$ est une **suite convergente**.

À retenir : Quand on dit que u_n peut être aussi proche de L que l'on veut pourvu que n soit suffisamment grand, il faut comprendre ici que peu importe la distance à laquelle vous souhaitez que u_n soit de L , vous trouverez toujours un rang à partir duquel u_n soit au plus à cette distance de L .

En reprenant l'exemple de la suite $u_n = \frac{1}{n}$, si je souhaite que u_n soit distant de $\frac{1}{3}$ de sa limite 0. Je vais trouver un rang à partir duquel tous les termes suivants seront à au plus $\frac{1}{3}$ de 0. Ici je trouve à partir du rang $n = 3$, nous avons tous les termes restant qui sont distant d'au plus $\frac{1}{3}$ de 0.

On retiendra que la notion de limite nous assure que si on s'approche assez de L , on en sort plus. Il faut voir ça comme un tunnel, dans lequel où si on rentre on ne peut plus sortir.

Ci dessous le tunnel, le tube, représentant les points à distance $\frac{1}{3}$ de 0, on voit bien que tous les points à partir du rang 3 sont dedans.

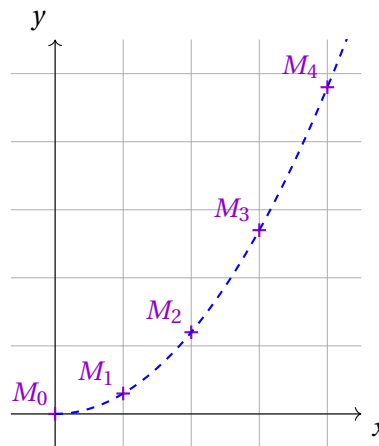


Et ceci est vrai quelque soit la taille de votre tunnel.

On peut noter ici $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

Exemple :

Représentons graphiquement les premiers termes d'une suite $(u_n)_n$.



Nous observons cette fois ci que plus n devient grand, plus le réel u_n devient grand également. Le réel u_n , dans ce cas ne se rapproche pas d'une limite finie L comme dans la définition précédente.

Définition 8 : Divergence

On dit qu'une suite $(u_n)_n$ est **divergente** ou qu'elle diverge si elle ne converge pas.

💡 **À retenir :** Dans la vie soit on converge, soit on diverge!

Dans l'exemple précédent, notre suite diverge car elle ne converge pas vers un réel **fini**. Nous pouvons tout de même dire que : $\lim u_n = +\infty$.

🔥 Point chaud : Les suites divergentes se rapprochent-elles toutes de $+\infty$?

Avec un peu de jugeote, on se rend compte que non! Pourquoi?

Car dans la définition d'une suite divergente, il est seulement demandé de ne pas converger. C'est-à-dire de ne pas se rapprocher autant que possible d'une valeur finie, à aucun moment on demande à la suite de diverger vers $+\infty$.

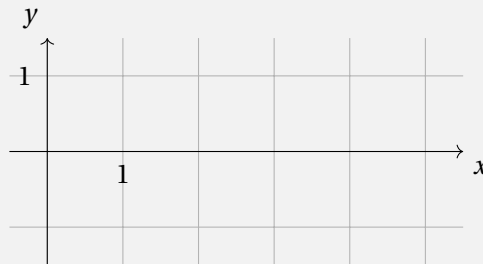
Maintenant qu'on est convaincu qu'il existe des suites divergentes ne se rapprochant pas de $+\infty$, a-t-on une telle suite?

Le plus simple c'est de construire une suite par extension, on peut prendre par exemple la suite définie dans le **À savoir faire 3**, la suite des décimales de π . Comme la suite prend des décimales, la valeur de chaque terme est

comprise entre 0 et 9, donc elle ne divergera jamais vers $+\infty$. De plus on sait que le nombre π est un nombre univers ce qui signifie qu'il a un nombre infini de décimales qui ne suivent aucune suites logiques, donc elle ne sera pas convergente non plus.

✂ À savoir faire 7 : Réperer graphiquement la divergence d'une suite

Représenter graphiquement la suite $(u_n)_n$ définie pour tout $n \in \mathbb{R}$ par : $u_n = (-1)^n$. Conclure sur une possible convergence de la suite $(u_n)_n$.



.....

B - Convergence des suites récurrentes

Pour étudier le cas des suites récurrentes nous allons voir une construction graphique des termes d'une suite à partir du graphe de f .

Méthode 1 : Construction graphique des termes d'une suite récurrente d'ordre un

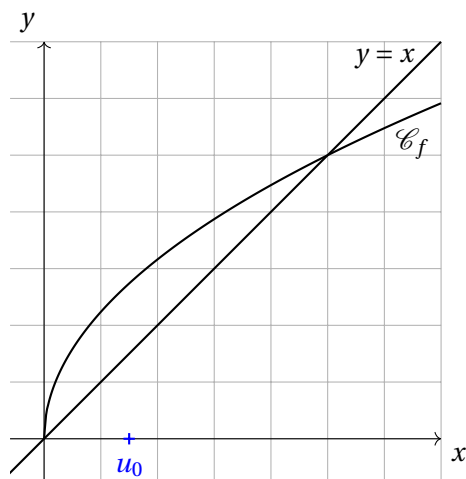
Soit $(u_n)_n$ une suite récurrente définie par :
$$\begin{cases} u_{n_0} \in \mathcal{D}_f, \\ u_{n+1} = f(u_n), \text{ pour } n \geq n_0 \end{cases}$$

- **Étape 1 :** On place u_n sur l'axe des abscisses;
- **Étape 2 :** On trace la verticale jusqu'à la courbe de f et on place $f(u_n) = u_{n+1}$ sur l'axe des ordonnées.
*Pour tracer le terme suivant u_{n+2} on n'oublie pas que u_{n+2} est l'image de u_{n+1} par f .
 Il nous faut donc avoir u_{n+1} sur l'axe des abscisses pour pouvoir regarder ensuite son image.*
- **Étape 3 :** Grâce à la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$ on reportage u_{n+1} sur l'axe des abscisses.
 On a placé u_{n+1} sur l'axe des abscisses.
- **Étape 4 :** On peut alors construire u_{n+2} en repartant de l'étape 2.

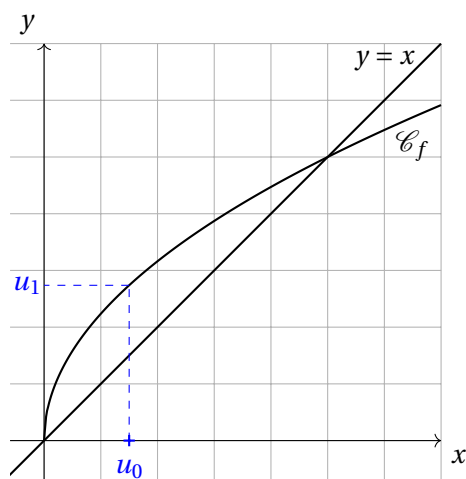
💡 À retenir : Ce qu'il faut retenir c'est que u_{n+1} est l'image de u_n par la fonction f .

▷ Regardons cette méthode sur un exemple :

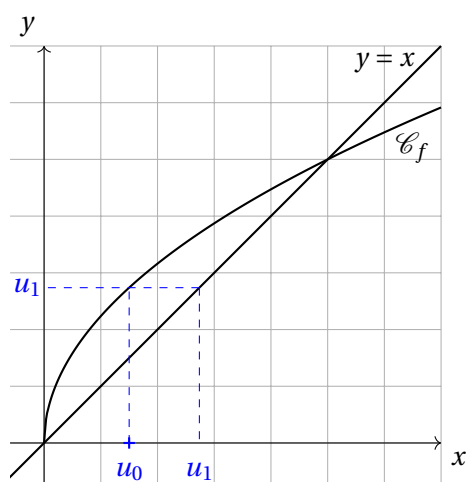
- **Étape 1 :** On place u_0 sur l'axe des abscisses.



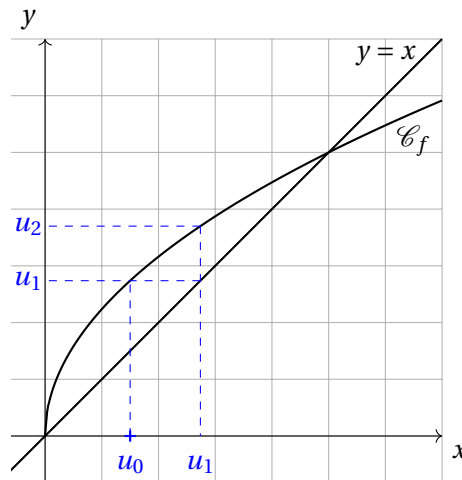
- **Étape 2 :** On trace la verticale jusqu'à la courbe de f et on place alors $f(u_0) = u_1$ sur l'axe des ordonnées.



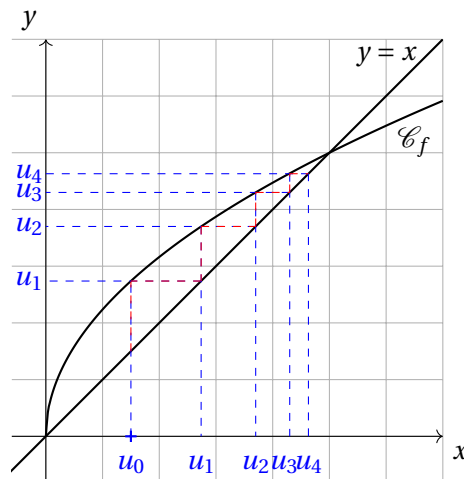
- **Étape 3 :** Grâce à la symétrie de la droite d'équation $y = x$ par rapport à la droite d'équation $y = x$ on reporte u_1 sur l'axe des abscisses. On a placé u_1 sur l'axe des abscisses.



- **Étape 4 :** On reprend l'étape 2 pour construire u_2 .



Si on poursuit cette méthode on va voir que ma suite récurrente va converger vers le point d'intersection entre la courbe \mathcal{C}_f et la droite d'équation $y = x$.



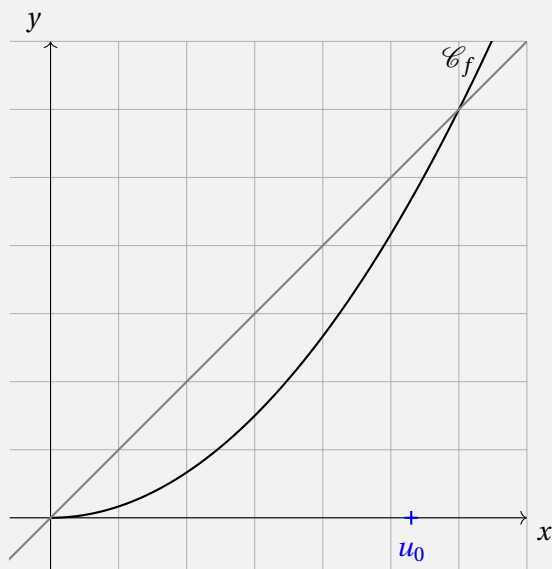
En rouge on représente la façon de converger la suite, ici en **escalier montant**.

Il y a différent type de convergence, en escalier montant, escalier descendant ou en escargot.

À savoir faire 8 : Représenter la convergence d'une suite récurrente (convergence en *escalier descendant*)

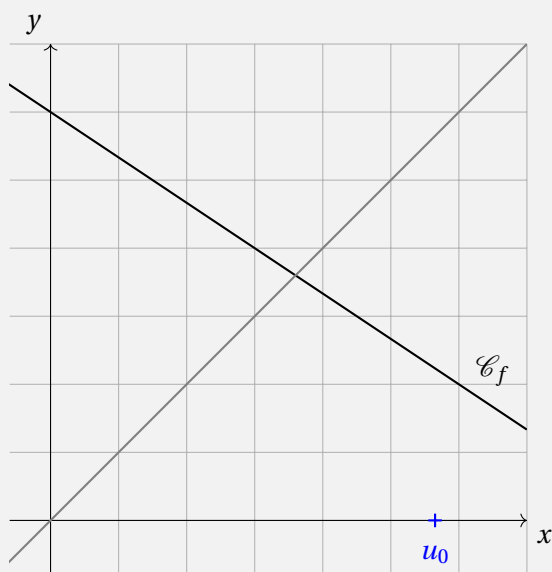
Représenter graphiquement les termes successifs de la suite récurrente définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathcal{D}_f, \\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour } n \geq 0 \end{cases} \text{ et donner le type de convergence de cette suite.}$$

**À savoir faire 9 : Représenter la convergence d'une suite récurrente (convergence en *escargot*)**

Représenter graphiquement les termes successifs de la suite récurrente définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathcal{D}_f, \\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour } n \geq 0 \end{cases} \text{ et donner le type de convergence de cette suite.}$$



Partie IV Sens de variation d'une suite

A - Définitions

Définition 9 : Sens de variation

Soit $(u_n)_n$ une suite définie à partir du rang $n_0 \in \mathbb{N}$, on dit que cette suite est :

- **croissante** si pour tout entier $n \geq n_0$: $u_n \leq u_{n+1}$
- **décroissante** si pour tout entier $n \geq n_0$: $u_n \geq u_{n+1}$

📌 Information : Et si continuait la comparaison avec les fonctions ?

Une fonction est croissante sur \mathbb{R} , si pour $x \leq y$ deux réels alors $f(x) \leq f(y)$. Étant donné qu'une suite est une fonction on peut utiliser cette définition pour obtenir la définition d'une suite croissante. On peut alors définir une suite croissante de la façon suivante :

Si pour n, m deux entiers naturels tels que : $n \leq m$ alors $u_n \leq u_m$.

Cependant une différence apparaît dans la nature des objets qui composent l'ensemble des nombres réels et l'ensemble des nombres entiers.

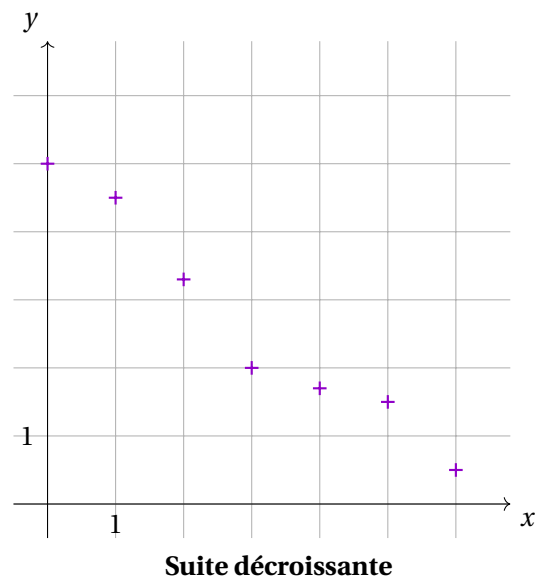
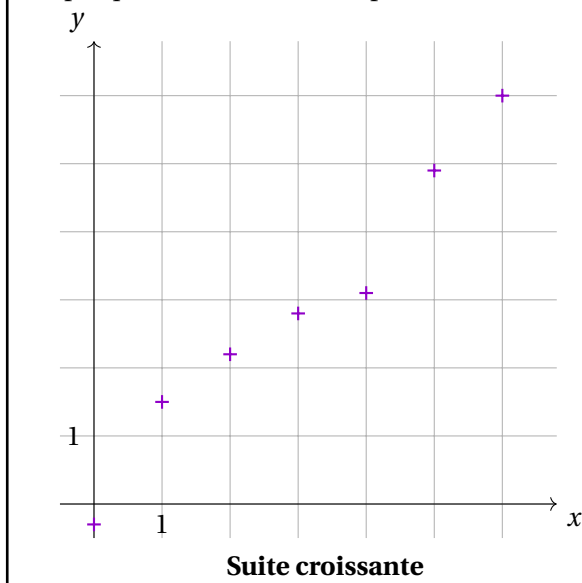
- Dans \mathbb{N} , un entier n possède un entier suivant $n+1$, ce qui permet de raisonner terme à terme dans le cas des suites ;
- Dans \mathbb{R} , il n'existe pas de réel immédiatement suivant un autre réel : entre deux réels il y en a toujours une infinité d'autres.

Cette spécificité des nombres entiers, nous permet d'affirmer qu'il suffit que chaque terme soit inférieur ou égal à son suivant ($u_n \leq u_{n+1}$) pour qu'une suite est croissante.

📌 À retenir : On retiendra qu'une suite est croissante si chaque terme est inférieur ou égal à son suivant (lorsqu'il en existe un...)

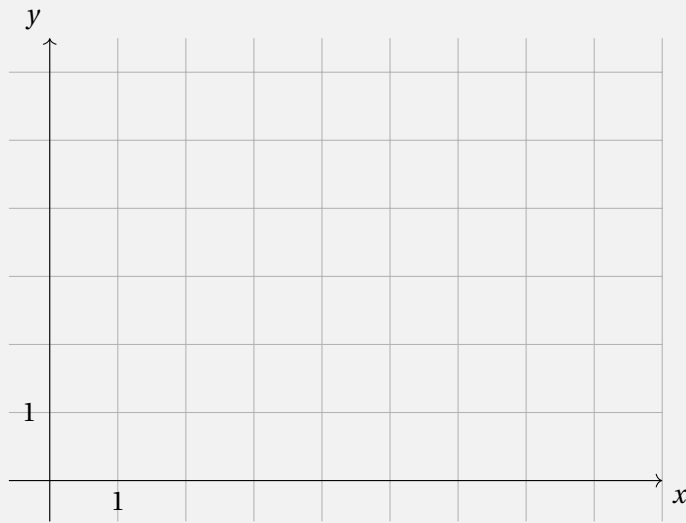
Exemple :

Graphiquement voici respectivement une suite croissante et une suite décroissante :



À savoir faire 9 : Montrer qu'une suite est croissante (ou presque)

1. Représenter les six premiers de la suite définie par $u_n = (n - 2)^2$



2. Justifier que la suite n'est ni croissante ni décroissante sur \mathbb{N} .

.....

.....

.....

.....

3. À partir de quel rang la suite semble-t-elle croissante? Montrer-le.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Définition 10 : Sens variation à partir d'un certain rang

Soient $(u_n)_n$ une suite définie sur son ensemble d'indice I et $n_1 \in I$. On dit que cette suite est :

- **croissante à partir du rang n_1** si pour tout entier $n \geq n_1 : u_n \leq u_{n+1}$
- **décroissante à partir du rang n_1** si pour tout entier $n \geq n_1 : u_n \geq u_{n+1}$

Attention :

- On ne dira pas qu'elle est décroissante sur $\llbracket 0, 2 \rrbracket$ puis croissante sur $\llbracket 2, +\infty[$
- Ici n_1 n'est pas forcément le premier indice de notre suite, dans l'exemple précédent on a $n_1 = 2$ or notre suite a pour premier indice 0.

À retenir : Ce qu'il faut comprendre c'est que les premiers termes d'une suite ne nous importent que très peu... nous étudions plutôt le comportement de la suite dans une globalité.

Dans l'exemple précédent nous aurions pu considérer la suite de terme général $u_n = (n - 2)^2$ à partir du rang $n = 2$, en oubliant les deux premiers.

Propriété 1 : Suite non monotone

Une suite n'est pas obligatoirement croissante ou décroissante, ou même croissante à partir d'un certain rang ou décroissante à partir d'un certain rang. Certaines suites n'ont pas de monotonie. On dit qu'elles sont **non monotone**.

Information : Une fonction **monotone** est une fonction qui a qu'un seul sens de variation, ou bien elle est croissante sur son domaine de définition ou bien elle est décroissante sur son domaine de définition.

À savoir faire 10 : Montrer qu'une suite n'est pas monotone

Montrer que la suite définie explicitement par : $u_n = (-1)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, n'est pas monotone.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

B - Étude du sens de variation

Dans cette partie considérons une suite $(u_n)_n$ définie sur $I = \llbracket n_0, +\infty[$.

B.1 - Différence**Propriété 2 : Étude du signe de la différence : $u_{n+1} - u_n$**

- La suite $(u_n)_n$ est **croissante** si, et seulement si, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout $n \geq n_0$.
- La suite $(u_n)_n$ est **décroissante** si, et seulement si, $u_{n+1} - u_n \leq 0$ pour tout $n \geq n_0$.

Démonstration :

$(u_n)_n$ est croissante \Leftrightarrow pour tout $n \geq n_0$: $u_{n+1} \geq u_n \Leftrightarrow$ pour tout $n \geq n_0$: $u_{n+1} - u_n \geq 0$ ■

À savoir faire 11 : Étudier le sens de variation d'une suite en étudiant le signe de sa différence

1. Étudier le sens de variation de la suite définie explicitement par : $u_n = -4n + 3$ pour $n \geq 0$.

.....

.....

.....

2. Étudier le sens de variation de la suite définie par récurrence par : $\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = u_n(u_n + 1) \text{ pour } n \geq 0 \end{cases}$.

.....

.....

B.2 - Quotient

Propriété 3 : Suite strictement positive

Supposons que : pour tout $n \geq n_0$, $u_n > 0$.

- La suite $(u_n)_n$ est **croissante** si, et seulement si, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ pour tout $n \geq n_0$.
- La suite $(u_n)_n$ est **décroissante** si, et seulement si, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ pour tout $n \geq n_0$.

Démonstration :

Supposons que $u_n > 0$ pour tout $n \geq n_0$,

$$(u_n)_n \text{ est croissante} \Leftrightarrow \text{pour tout } n \geq n_0 : u_{n+1} \geq u_n$$

$$\Leftrightarrow \text{pour tout } n \geq n_0 : \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \text{ (car } u_n > 0 \text{ pour tout } n \geq n_0)$$



Information : De même pour les suites strictement négative

Si pour tout $n \geq n_0$, $u_n < 0$ alors $(u_n)_n$ est **croissante** si, et seulement si, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ pour tout $n \geq n_0$. Et décroissante dans le cas où $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$

Ce dont nous avons besoin pour énoncer notre propriété c'est du suite de signe constant, qui ne s'annule pas.

À savoir faire 12 : Étudier le sens de variation d'une suite en étudiant un quotient.

Montrer que la suite définie explicitement sur \mathbb{N}^* par : $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

B.3 - Cas des suites explicites

Propriété 4 : Suite définie explicitement

Soit f une fonction définie sur $[n_0, +\infty[$, on considère la suite $(u_n)_n$ définie pour $n \geq n_0$ par $u_n = f(n)$.

- Si f est croissante sur $[n_0, +\infty[$, alors $(u_n)_n$ est croissante.
- Si f est décroissante sur $[n_0, +\infty[$, alors $(u_n)_n$ est décroissante.

Exemple :

Considérons la suite définie explicitement par $u_n = f(n)$ où $f(x) = (x - 2)^2$.

La fonction f est croissante sur $[2, +\infty[$ d'où par la propriété précédente nous avons que $(u_n)_n$ est croissante à partir du rang $n = 2$.

Démonstration :

Soit f une fonction croissante définie sur $[n_0, +\infty[$.

Montrons que la suite $(u_n)_n$ est croissante à partir du rang n_0 .

Soit $n \geq n_0$, comme f est croissante sur $[n_0, +\infty[$:

$$n < n+1 \Rightarrow f(n) \leq f(n+1) \text{ i.e. } u_n \leq u_{n+1}$$

D'où $(u_n)_n$ est croissante à partir du rang n_0 .

La preuve du cas où f est décroissante est analogue. ■

Erreur fréquente : Nous n'avons pas équivalence pour cette propriété

Contrairement aux propriétés 1 et 2, il n'y a pas équivalence dans cette propriété. En effet il existe des suites décroissantes (respectivement croissantes) définies explicitement par $u_n = f(n)$ tel que f ne soit pas décroissante (respectivement croissante).

Nous n'écrivons donc jamais pour une suite définie explicitement par $u_n = f(n)$:

~~Comme $(u_n)_n$ est décroissante alors f est décroissante.~~

Exemple :

Voyons un exemple de suite $(u_n)_n$ décroissante tel que $u_n = f(n)$ et f n'étant pas décroissante.

Nous n'avons pas encore étudié les fonctions trigonométriques, mais nous le ferons plus tard dans l'année. Donc si vous le souhaitez vous pouvez l'accepter en tant que boîte noire et revenir plus tard dans l'année pour reprendre l'exemple.

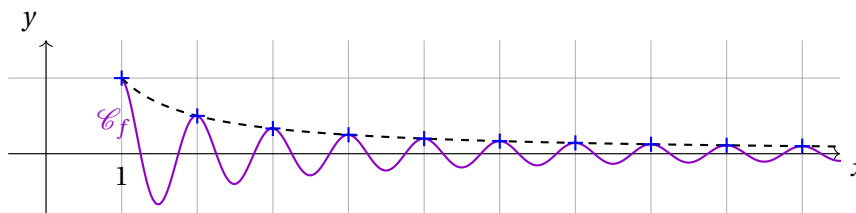
Considérons la fonction $f : x \mapsto \frac{\cos(2\pi x)}{x}$, qui est définie sur $[1, +\infty[$ ainsi la suite $(u_n)_n$ est définie pour $n \geq 1$. De plus pour tout $n \geq 1$ on a :

$$u_n = \frac{\cos(2\pi n)}{n} = \frac{1}{n}$$

L'égalité $\cos(2\pi n) = \cos 0 = 1$ sera très vite éclairci dès lors qu'on aura fait un peu de trigonométrie, pour l'instant acceptez-la.

Ainsi comme $u_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$ on peut alors assurer que $(u_n)_n$ est bien une suite décroissante.

Or f n'est pas décroissante, elle n'est pas monotone. Voyons la situation graphiquement :



Point chaud : La propriété est fausse pour les suites définies par récurrence

Cette dernière propriété ne s'applique qu'aux suites définies explicitement, cette propriété est fausse pour une suite définie par récurrence.

Exemple :

Considérons la suite définie par récurrence : $\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ où $f : x \mapsto \frac{x}{2}$ qui est définie sur \mathbb{R} .

Clairement f est croissante sur \mathbb{R} , or nous pouvons montrer que $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.

On va supposer connu que $u_n > 0$ pour tout $n \geq 0$ (nous ne pouvons pas le montrer pour l'instant...).

On peut donc regarder, pour $n \geq 0$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{u_n}{2}}{u_n} = \frac{1}{2} < 1$, donc $(u_n)_n$ est décroissante.

Partie V Exercices

A - Généralités sur les suites

★★☆☆☆ EXERCICE 1 (Premiers termes) (1)

Calculer les trois premiers termes de chacune des suites suivantes :

1. $u_n = 3n + 7$

3. $u_n = \frac{n}{n+1} + 2$

6. $u_n = (-1)^n - n$

2. $u_n = \frac{1}{2n-1}$

4. $u_n = n^2 - 7n + 2$

7. $u_n = \sqrt{5n+1}$

5. $u_n = 2^n - 3$

8. $u_n = \frac{3}{4} - \frac{n}{4}$

★★★★☆☆ EXERCICE 2 (Ensemble des indices) (2)

Pour chacune des suites suivantes, déterminer l'ensemble des indices et les trois premiers termes de celle-ci.

1. $u_n = \frac{n+1}{n+2}$

4. $u_n = \frac{n(n+2)}{n+1}$

6. $u_n = \frac{9n-5}{4n+6}$

2. $u_n = \frac{3^n}{n}$

7. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

3. $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

5. $u_n = \frac{3^{n+1}}{2^n}$

8. $u_n = 3\sqrt{n^2-3n}$

★★☆☆☆ EXERCICE 3 (Représentation graphique) (3)

Après avoir tracé un repère orthonormé, représenter sur cet axe les six premiers termes des suites suivantes :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n}$

2. $v_n = (-1)^n$

★★★★☆☆ EXERCICE 4 (Suites explicites) (4)

Après avoir déterminé l'ensemble de définition de chaque fonction, déterminer l'ensemble des indices de chacune des suites suivantes :

1. $u_n = f(n)$ où $f: x \mapsto \frac{x+3}{x-1}$

2. $v_n = g(n)$ où $g: x \mapsto \sqrt{x^2-9}$

3. $w_n = h(n)$ où $h: x \mapsto \frac{(x-7)(x+5)}{x-7}$

★★★★☆☆ EXERCICE 5 (Suites récurrentes) (5)

Calculer les trois premiers termes de chacune des suites suivantes :

1. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 1, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

4. $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{3}{u_n^2 + 2}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

2. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

5. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = nu_n + 1, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

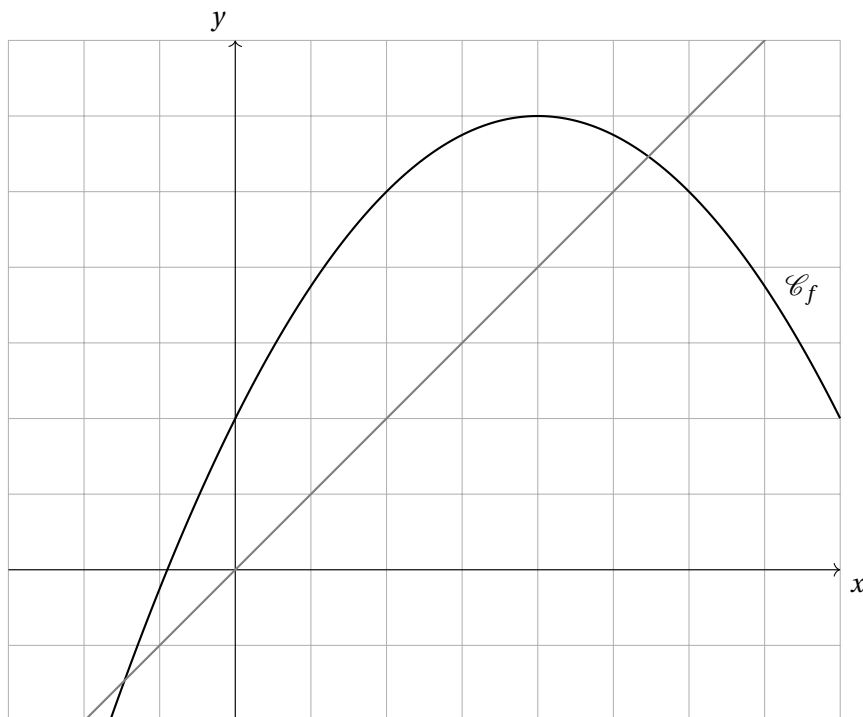
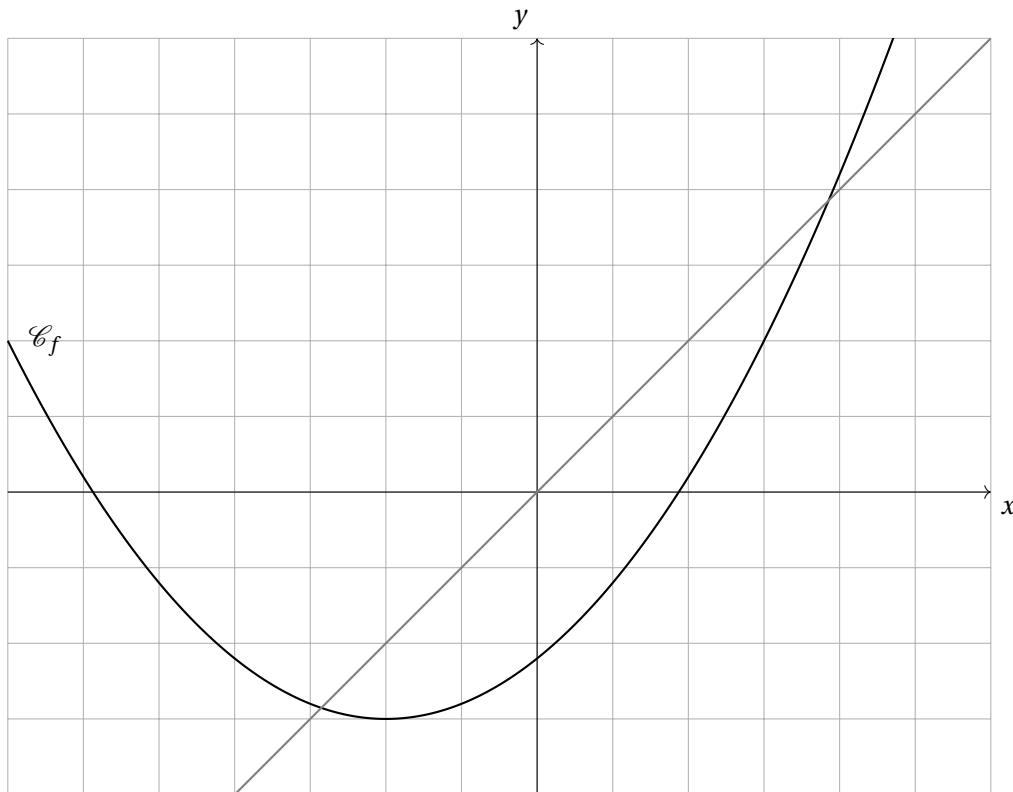
3. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{u_n}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

6. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

B - Convergence des suites récurrentes

★★★☆☆ EXERCICE 6 (Convergence) ①

Construire les premiers termes des suites récurrentes suivantes ci-dessus, dès que cela est possible préciser si la suite converge et vers quelle valeur hypothétique.



C - Sens de variation d'une suite

★★☆☆☆ EXERCICE 7 (Étude #1) (⌚)

Déterminer le sens de variation des suites suivantes :

1. $u_n = n^2 - 4n + 3$

2. $u_{n+1} = u_n - 4n + 3$

3. $u_n = \frac{n+1}{n+2}$

4. $u_n = 2n^2 - 4n + 8$

5. $u_n = 1 + \frac{1}{n}$

6. $u_n = 2n^2 - 1$

7. $u_n = -6 \times 3^n$

8. $u_n = \frac{9}{2^n} + 5$

9. $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 1$

10. $u_n = -\frac{2}{n+4}$

11. $u_n = \frac{5^n}{n}$

12. $u_n = \frac{3^n}{2n}$

13. $u_n = \frac{2-n}{2+n}$

14. $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

15. $u_n = 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \dots \times \frac{1}{n}$

16. $u_n = \frac{3^n}{5^n} \sqrt{n}$

17. $u_n = n^3 - n^2 + 5n - 3$

★★★★★ EXERCICE 8 (Étude complète) (⌚)

La suite $(u_n)_n$ est définie par : $u_n = \frac{3n-2}{n+1}$

1. Représenter graphiquement sur votre calculatrice la suite $(u_n)_n$.
2. Conjecturer son sens de variation et sa limite.
3. Prouver la conjecture sur le sens de variation de la suite.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-2 \leq u_n \leq 3$.
5. Déterminer, par un calcul, l'entier n_0 à partir duquel on a $u_n \geq 2,8$ pour tout $n \geq n_0$.