CHAPITRE 10

Fonction exponentielle

Plan du chapitre

Introduction

Dans ce chapitre, on va s'intéresser à une fonction qui s'avère être primordial en mathématiques, en physique et bien d'autres domaines. Cette fonction modélise des processus de croissance (ou décroissance) très rapide, comme :

- la désintégration de noyaux radioactifs ;
- la durée de vie de certains composants électroniques (en probabilité) ;
- l'évolution d'une population (avec des fonctions logistiques).

À la base de cette fonction on se demandera s'il existe une fonction qui est égale à sa propre dérivée.

Partie I Définition de la fonction exponentielle

A - Existence

Théorème 1 : Existence

Il existe une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui est égale à sa propre dérivée et égale à 1 en 0, c'est-à-dire vérifiant :

$$\begin{cases} f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Démonstration :

La preuve de l'existence de cette fameuse dépasse le cadre de l'année de preuve, donc nous l'admettrons cette année.

Théorème 2 :

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $\begin{cases} f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$, alors f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Démonstration :

Considérons la fonction $g : x \mapsto f(x)f(-x)$.
Comme produit de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, g est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x) \\ &= f(x)f(-x) - f(x)f(-x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi comme $g'(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$ un intervalle, on a alors que g est constante sur $\mathbb{R}$ ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$g(x) = g(0) = f(0)f(-0) = 1$$

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x)f(-x) = 1$, donc $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
De plus on a : $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$ ■

B - Unicité

Théorème 3 : Unicité

Il existe une unique fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vérfie $\begin{cases} f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$

Démonstration :

Considérons deux fonctions f et g telles que :

$$\begin{cases} f'(x) = f(x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \\ f(0) = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} g'(x) = g(x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

D'après le théorème précédent on sait que la fonction g ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc on peut considérer :

$$u : x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

Comme fonction quotient, la fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \\ &= \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x)}{g(x)^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi comme $u'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (un intervalle), on a alors que la fonction u est constante sur $\mathbb{R}$.
C'est-à-dire, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $u(x) = u(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{1}{1} = 1$.
Ainsi on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\frac{f(x)}{g(x)} = 1$, c'est-à-dire : $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Donc il existe une unique fonction tel que $f'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $f(0) = 1$. ■

C - Définition

Définition 1 : Fonction exponentielle

L'unique fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant : $\begin{cases} f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$ s'appelle la **fonction exponentielle** et se note exp.

On a donc d'après les théorèmes précédents, les propriétés suivantes :

Propriété 1 :

- $\exp'(x) = \exp(x)$;
- $\exp(0) = 1$;
- $\exp(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;
- $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Information : Il existe d'autres fonctions dérivables égales à leur propre dérivée.
Pour $k \in \mathbb{R}$, la fonction $f : x \mapsto k\exp(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, tel que :

$$f'(x) = k\exp'(x) = k\exp(x) = f(x)$$

En revanche, $f(0) = k$ d'où la fonction exponentielle que l'on vient de définir est l'unique vérifiant $f(0) = 1$.

Partie II Propriétés algébriques

Propriété 2 : Relation fonctionnelle

Soit $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$$

À retenir : Ainsi, la fonction exponentielle nous permet d'étendre aux exposants **réels** la propriété algébrique :

$$a^{n+p} = a^n \times a^p, \text{ avec } n, p \in \mathbb{Z}$$

Démonstration :

De la même manière que précédemment, considérons une fonction de dérivée nulle.
Pour $y \in \mathbb{R}$ fixé, considérons la fonction :

$$h : x \mapsto \frac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$$

h est bien définie sur $\mathbb{R}$ car la fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, de plus h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.
Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{\exp'(x+y)\exp(x) - \exp(x+y)\exp'(x)}{\exp(x)^2} \\ &= \frac{\exp(x+y)\exp(x) - \exp(x+y)\exp(x)}{\exp(x)^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi comme $h'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (un intervalle), on a alors que la fonction h est constante sur $\mathbb{R}$.
Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h(x) = h(0) = \frac{\exp(y)}{\exp(0)} = \exp(y)$$

Pour conclure, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\exp(x+y)}{\exp(x)} = \exp(y) \Leftrightarrow \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$$

■

Propriété 3 :

Soit $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

- $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$;
- $\exp(x)^n = \exp(nx)$, où $n \in \mathbb{Z}$;
- La fonction exponentielle est strictement positive ;
- $\sqrt{\exp(x)} = \exp\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

Démonstration :

- Pour $x, y \in \mathbb{R}$, $\exp(x-y) = \exp(x) \times \exp(-y) = \exp(x) \times \dfrac{1}{\exp(y)} = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$: $\exp(nx) = \exp(x + x + \cdots + x) = \exp(x) \times \exp(x) + \cdots + \exp(x) = \exp(x)^n$.

(*La rigueur voudrait qu'on utilise un raisonnement par récurrence.*)
Pour $n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$, on a $n = -p$ où $p \in \mathbb{N}$: $\exp(nx) = \exp(-px) = \dfrac{1}{\exp(px)} = \dfrac{1}{\exp(x)^p} = \exp(x)^{-p}$;

- (*On utilisera un théorème hors programme*) Supposons par l'absurde qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\exp(c) < 0$ ainsi comme l'exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que 0 est compris entre $\exp(c)$ et $\exp(0) = 1$, donc d'après le **théorème des valeurs intermédiaires** on a qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\exp(x_0) = 0$, ce qui est absurde d'après un théorème précédent.
- Par définition, $\sqrt{\exp(x)}$ est l'unique nombre positif qui élevé au carré est égale à $\exp(x)$.
Il est clair que $\exp\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 = \exp\left(2 \times \dfrac{x}{2}\right) = \exp(x)$.
De plus $\exp\left(\dfrac{x}{2}\right)$ est positif donc par unicité :

$$\exp\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\exp(x)}$$

■

À savoir faire 1 : Manipuler la fonction exponentielle

1. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ $4 - \dfrac{4}{1+\exp(x)} = \dfrac{4}{1+\exp(-x)}$.

....
....
....
....
....
....
....
....

2. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\left(\exp(x)+\exp(-x)\right)^2 - \left(\exp(x)-\exp(-x)\right)^2 = 4$

....
....
....
....
....
....
....
....

3. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\dfrac{\exp(2x)-1}{\exp(2x)+1} = \dfrac{\exp(x)-\exp(-x)}{\exp(x)+\exp(-x)}$

....
....
....
....
....

....

....

....

Partie III Le nombre d'Euler

Définition 2 : Le nombre d'Euler

Le réel e, que l'on nommera **nombre d'Euler**, est l'image de 1 par la fonction exponentielle.

$$e = \exp(1) \simeq 2,718$$

Propriété 4 :

Pour $n \in \mathbb{Z}$: $\exp(n) = e^n$.

***Démonstration* :**

Pour $n \in \mathbb{Z}$ on a : $\exp(n) = \exp(n \times 1) = \exp(1)^n = e^n$. ∎

Ce qui nous permet d'affirmer que la fonction exponentielle coïncide avec la puissance du nombre d'Euler, e. On pourrait se demander si l'égalité est conservée sur les nombres réels non entier x, car il est clair que :

$$e^x = \underbrace{e \times \cdots \times e}_{x \text{ fois}}$$

n'a aucun sens pour x non entier.

On admettra cette année que la fonction exponentielle coïncide avec les puissances de e, le nombre d'Euler.

On a alors :

Propriété 5 :

Pour $x, y \in \mathbb{R}$ on a :

- $\exp(x) = e^x$;
- $e^{x+y} = e^x \times e^y$;
- $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$;
- $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$;
- $(e^x)^n = e^{nx}$, pour $n \in \mathbb{Z}$;
- $\sqrt{e^x} = e^{\frac{x}{2}}$.

À savoir faire 2 : Manipuler les puissances de e

Écrire les nombres suivants comme une puissance de e, pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

1. $e^5 \times e^4 =$ ....
2. $\left(e^3\right)^2 =$ ....
3. $e^5 \times \left(e^{-2}\right)^6 =$ ....
4. $\dfrac{(e^x)^2}{e^5} =$ ....
5. $\dfrac{e^{4x} - e^{2x}}{e^{2x}} =$ ....
6. $\sqrt{e} \times e^{\frac{3}{2}} =$ ....
7. $e^{\frac{1}{3}} \times \sqrt{e^{\frac{3}{10}}} =$ ....
8. $\left(e^{n+1}\right)^2 =$ ....

9. $\sqrt{e^{4n-2}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
10. $\left(e^{n-1}\right)^2 \times \sqrt{e^{6n-2}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
11. $\dfrac{\left(e^{3n-4}\right)^3 \times \sqrt{e^{2n+4}}}{e^{-2n} \times e} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Partie IV Étude de la fonction exponentielle

On rappelle que la fonction exponentielle est strictement positive.

A - Signe et variation

Théorème 4 : Variation

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

***Démonstration* :**

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\exp'(x) = \exp(x) > 0$$

donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. ■

Corollaire 1 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons :

- $x < 0 \Leftrightarrow 0 < e^x < 1$;
- $x > 0 \Leftrightarrow e^x > 1$;
- $x = 0 \Leftrightarrow e^x = 1$.

***Démonstration* :**

- Soit $x < 0$, par stricte croissance de la fonction exponentielle on a :

$$e^x < e^0$$

De plus, on sait que la fonction exponentielle est strictement positive donc :

$$0 < e^x < 1$$

- Soit $x > 0$, par stricte croissance de la fonction exponentielle on a :

$$e^x > e^0$$
$$\Leftrightarrow e^x > 1$$

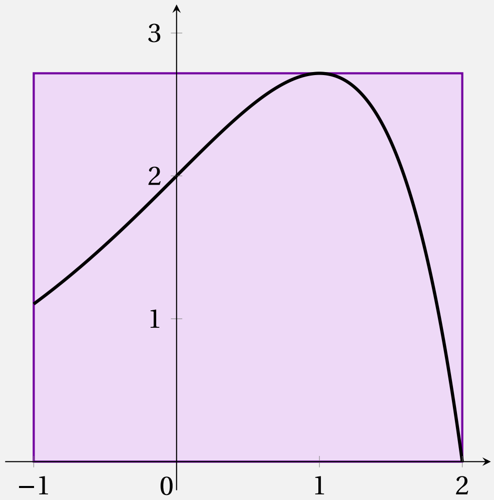
- $\boxed{\Rightarrow}$ Pour $x = 0$ est clair que $e^x = e^0 = 1$.
  $\boxed{\Leftarrow}$ Par contraposition, montrons que si $x \neq 0$ alors e^x.
  Si $x \neq 0$ on a alors : $(x < 0)$ ou $(x > 0)$ et par les deux points précédents on montre que $e^x \neq 0$.

■

À savoir faire 3 : Dérivée de la fonction exponentielle

Une entreprise de menuiserie réalise des découpes dans des plaques rectangulaires de bois. Dans un repère orthonormé ci-dessous, on modélise la forme de la découpe dans la plaque dans la plaque rectangulaire par la

courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[-1,2]$ par $f(x) = (-x+2)e^x$.
Le bord supérieur de la plaque rectangulaire est tangent à la courbe $\mathscr{C}_f$. On nomme L la longueur de la plaque rectangulaire et l sa largeur.



1. (a) Montrer que pour tout $x \in [-1,2]$, $f'(x) = (-x+1)e^x$.

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   (b) En déduire le tableau de variations de la fonction f sur $[-1,2]$.

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

2. La longueur L de la plaque rectangulaire est de 90cm. Trouver sa largeur exacte l en cm.

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

B - Équations et inéquations

Corollaire 2 :

- $e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$;
- $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$.

***Démonstration* :**
Application directe de la stricte croissance de l'exponentielle. ■

À savoir faire 4 : Équation et inéquation

1. Résoudre $e^{3x-1} - e^{-2x} = 0$

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

2. Résoudre $e^{3x} \leq e^{-x}$

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$, $e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

C - Dérivation

Propriété 6 :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
La fonction $f : x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et nous avons, pour tout $x \in I$:

$$f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$$

À savoir faire 5 : Dérivation

Dériver les fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto e^{4x+5}$

   ...

2. $g : x \mapsto e^{\left(\frac{x-3}{5}\right)^2}$

   ...

3. $h : x \mapsto e^{\sqrt{7x-5}}$

   ...

4. $m : x \mapsto e^{\frac{x^2-3x+5}{2x+5}}$

   ...

5. $n : x \mapsto \left(e^{7x^2+6}\right)^4$

   ...

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Partie V Exercices