

Polynôme du second degré

Plan du chapitre

| | |
|---|-----------|
| I Définitions et vocabulaires | 2 |
| A - Fonction polynôme | 2 |
| B - Fonction polynôme du second degré | 3 |
| II Forme canonique | 4 |
| A - Un premier exemple | 4 |
| B - Théorème | 7 |
| III Courbe représentative | 8 |
| A - Sommet et axe de symétrie | 8 |
| B - Variations d'une fonction polynomiale du second degré | 10 |
| IV Exercices | 13 |
| A - Fonction polynomiale | 13 |
| B - Forme canonique | 13 |
| C - Courbe représentative | 14 |

Introduction

Àu collège vous avez appris à résoudre des équations de degré un, c'est-à-dire des équations de la forme : $ax + b = cx + d$, et vous avez vu qu'une solution, si elle existe est de la forme : $x = \frac{d-b}{a-c}$. En classe de seconde vous avez prolongé ça en résolvant certaine équation de degré deux, celle qui sont de la forme équation produit nul $a(x - r_1)(x - r_2) = 0$. Le but de cette année sera de savoir résoudre les équations de degré deux (ou alors de savoir assurer qu'elles n'ont pas de solution dans certains cas).

Partie I Définitions et vocabulaires

A - Fonction polynôme

Définition 1 : Fonction polynomiale

On appelle toute fonction f définie sur \mathbb{R} tel que pour $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

où les $n + 1$ nombres réels : a_0, a_1, \dots, a_n sont appelés les de notre fonction polynôme f .

Cette forme s'appelle la de la fonction polynôme du seconde degré.

Dans le cas où $a_n \neq 0$, on dit que n est le de notre fonction polynôme f et on notera : $\deg(f) = n$.

À retenir : Le terme de plus haut degré en x (ayant donc un coefficient non nul) nous donne le degré de notre fonction polynôme.

C'est-à-dire : $P : x \mapsto 0x^n + x^{n-1}$ n'est pas de degré n mais de degré $n - 1$ car le coefficient devant le terme de degré n est nul...

Information : On abrégera *fonction polynomiale* en **polynôme**.

Exemple :

- $P_1 : x \mapsto 5$ est une fonction polynomiale de degré 0
- $P_2 : x \mapsto 2x - 7$ est une fonction polynomiale de degré 1
- $P_3 : x \mapsto -3x^7 + 5x^6 + \pi x^4 - \frac{2}{3}x^2 + x^9 + 8$ est une fonction polynomiale de degré 9
- $P_4 : x \mapsto (x + 1)(x + 2)$ est une fonction polynomiale de degré 2, en effet $P_4(x) = x^2 + 3x + 2$.

À retenir :

- Les fonctions constante, c'est-à-dire de la forme : $f : x \mapsto k$ sont des fonctions polynomiales de degré 0 ;
- Les fonctions affines, c'est-à-dire la forme : $f : x \mapsto ax + b$ sont des fonctions polynomiales de degré 1 ;
- On fera bien attention le terme de plus degré n'est pas forcément tout à gauche ou alors tout à droite de l'expression. Il faut prendre le temps de regarder tous les termes pour déterminer le degré d'un polynôme.
- Le degré d'un polynôme s'obtient à partir de la forme développé du polynôme. Il faut donc bien penser à développer l'expression de notre polynôme pour obtenir son degré.

À savoir faire 1 : Déterminer le degré d'une fonction polynomiale

Déterminer le degré de chacune des fonctions polynomiales suivantes :

- | | |
|---|--|
| 1. $P_1 : x \mapsto 7x - 5 + 6x^8$ | 3. $P_3 : x \mapsto (x + 1)(x + 2)(x + 3)$ |
| 2. $P_2 : x \mapsto x^4 + 3x^3 - 8x^2 + x^3 - x^4 - 7x + 3$ | 4. $P_4 : x \mapsto (4x + 2)^2 - (7x - 1)^2$ |

.....

i Information :

- On appelle tout polynôme pour lequel un seul coefficient est non nul (peu importe son degré).
Par exemple : $m : x \mapsto 9x^5$ est une fonction monôme de degré 5.
- On appelle tout polynôme pour lequel deux coefficients sont non nuls
Par exemple : $b : x \mapsto 5x^4 - 8x$ est une fonction binôme de degré 4.
- On appelle tout polynôme pour lequel trois coefficients sont non nuls
Par exemple : $t : x \mapsto -2x^2 + x - 6$ est une fonction trinôme de degré 2.
- Et on s'arrêtera là...

B - Fonction polynôme du second degré

Définition 2 : Fonction polynomiale du second degré

Soient a, b et c trois nombres réels tels que $a \neq 0$.

On appelle toute fonction f définie sur \mathbb{R} tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Cette forme s'appelle la de la fonction polynôme du seconde degré.

On appellera a le de notre fonction polynomiale de degré 2, b le et c le

i Information : On abrégera *fonction polynomiale du second degré* en **polynôme du second degré**, ou encore **trinôme du second degré**.

Exemple :

- $f : x \mapsto 7x^2 + 3x + 1$ est une fonction polynomiale du second degré de coefficient quadratique 7, coefficient linéaire 3 et coefficient constant 1 ;
- $g : x \mapsto x^2 - 1$ est une fonction polynomiale du second degré de coefficient quadratique 1, coefficient linéaire 0 et de coefficient constant -1 ;
- $h : x \mapsto x^3 - x^2 + x - 1$ n'est pas une fonction polynomiale du second degré étant donné que $\deg(h) = 3$.

✂ À savoir faire 2 : Reconnaître un polynôme du second degré et identifier ses coefficients

Reconnaître les polynômes du second degré et déterminer les coefficients quadratique, linéaire et constant de leur forme développée :

- | | | |
|-----------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| 1. $P_1 : x \mapsto x^2$ | 3. $P_3 : x \mapsto (2x + 3)(x - 1)$ | 5. $P_5 : x \mapsto x^2 - (x - 1)^2$ |
| 2. $P_2 : x \mapsto 7x - 3 + x^2$ | 4. $P_4 : x \mapsto 5x - 3$ | 6. $P_6 : x \mapsto (x + 1)^3 - x^3$ |

.....

Partie II Forme canonique

A - Un premier exemple

L'objectif pour résoudre une équation de degré deux est de se ramener à une équation de degré un à l'aide de la propriété d'**équation produit nul**.

Par exemple sur l'équation de degré deux :

$$25x^2 - 36 = 0 \quad (E)$$

On va chercher à obtenir une équation produit nul, nous avons déjà le "*nul*" étant donné que nous avons le **second membre** égal à 0. Il nous faut maintenant gagner le "*produit*" car ici le membre de gauche dans notre équation (E) est une somme. Pour transformer cette somme en un produit on va chercher à **factoriser** le membre de gauche. Factorisons notre polynôme du second degré :

$$\begin{aligned} 25x^2 - 36 &= 5^2x^2 - 6^2 \\ &= (5x)^2 - 6^2 \\ &= (5x - 6)(5x + 6) \end{aligned}$$

Ainsi l'équation (E) devient :

$$\begin{aligned} (E) &\Leftrightarrow (5x - 6)(5x + 6) = 0 \\ &\Leftrightarrow 5x - 6 = 0 \quad \text{ou} \quad 5x + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{6}{5} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{6}{5} \end{aligned}$$

Ainsi $S = \left\{ \frac{6}{5}, -\frac{6}{5} \right\}$.

Si maintenant on s'intéresse à l'équation du second degré suivante :

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

De la même manière on va chercher à se ramener à une équation produit nul :

- Le second est déjà égal à 0 ✓ ;
- Malheureusement on a beau chercher on ne va pas réussir à factoriser notre membre de gauche (ni facteur commun, ni identité remarquable...)

Voilà qu'intervient la **forme canonique** d'une fonction polynôme du second degré, c'est une forme à partir de laquelle on peut savoir si le polynôme peut se factoriser ou non.

Cette forme est obtenue à partir d'une astuce qui consiste à rajouter un terme puis à l'ôter de façon à obtenir le début d'une identité remarquable.

Exemple :

Soit $P_1 : x \mapsto x^2 + 2x - 8$,

les deux premiers termes sont $x^2 + 2x = x^2 + 2 \times x \times 1$, on reconnaît ici le début d'une identité remarquable :

$$x^2 + 2 \times x \times 1 + 1^2 = (x + 1)^2$$

Ici il nous manque ce 1^2 pour avoir notre identité remarquable complète, c'est pour cela qu'on va ajouter 1^2 , si on ajoute il faut le retirer pour conserver l'égalité, ainsi :

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 8 &= x^2 + 2x + 1^2 - 1^2 - 8 \\ &= (x + 1)^2 - 9 \end{aligned}$$

On a alors : $P_1(x) = (x + 1)^2 - 9$ qui est la forme canonique de notre fonction polynomiale.

Grâce à cette forme canonique nous allons voir si l'on peut factoriser $P_1(x)$:

$$\begin{aligned} P_1(x) &= (x + 1)^2 - 9 \\ &= (x + 1)^2 - 3^2 \\ &= (x + 1 - 3)(x + 1 + 3) \\ &= (x - 2)(x + 4) \end{aligned}$$

D'où l'équation $P_1(x) = 0$ (que l'on a défini en haut de la page) est maintenant facilement résoluble par la propriété d'équation produit nul.

Voyons sur un autre exemple, plus complexe :

Exemple :

Cherchons la forme canonique du polynôme $P_2 : x \mapsto 2x^2 + 3x - 14$.

Dans ce cas là on remarque rapidement que le coefficient dominant (le coefficient devant le terme de plus au degré, ici le coefficient quadratique) n'est pas égal à 1 comme dans l'exemple précédent.

L'objectif ici va être de se ramener à un polynôme ayant comme coefficient quadratique 1. Pour cela on va factoriser par le coefficient quadratique :

$$\begin{aligned} P_2(x) &= 2x^2 + 3x - 14 \\ &= 2 \left(x^2 + \frac{3}{2}x - 7 \right) \end{aligned}$$

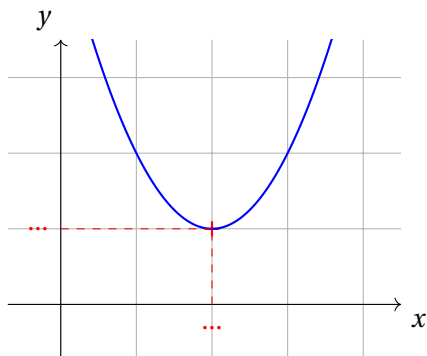
À partir d'ici on fait le même travail que précédemment mais avec le polynôme : $x^2 + \frac{3}{2}x - 7$.

De la même manière on va chercher à retrouver le début d'une identité remarquable dans :

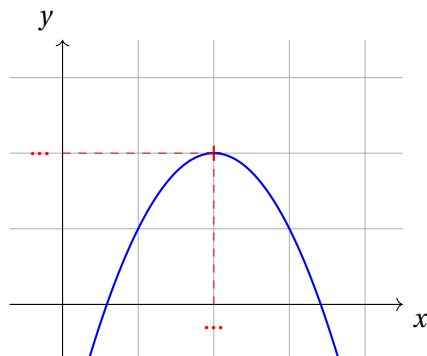
$$x^2 + \frac{3}{2}x = x^2 + 2 \times x \times \frac{3}{4}$$

On essaye toujours de faire apparaître : premier terme² + 2 × premier terme × quelque chose, ce fameux quelque chose (qui est là pour conserver l'égalité n'oublions pas) sera le terme manquant dans notre identité remarquable (ou plus précisément la racine du terme manquant...) Dans notre cas :

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{3}{2}x &= x^2 + 2 \times x \times \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 \\ &= \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} \end{aligned}$$



Cas où $a > 0$



Cas où $a < 0$

À retenir : On remarque que :

- Si $a > 0$ alors β est le minimum de P sur \mathbb{R} , on notera $\min_{x \in \mathbb{R}}(P(x)) = \beta$
- Si $a < 0$ alors β est le maximum de P sur \mathbb{R} , on notera $\max_{x \in \mathbb{R}}(P(x)) = \beta$

Exemple :

En reprenant une fonction polynomiale du second degré que l'on a déjà traité dans un exemple précédent :

$$P : x \mapsto 2x^2 + 3x - 14$$

Comme on a déjà vu : $P(x) = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{121}{8} = 2\left(x - \left(-\frac{3}{4}\right)\right)^2 - \frac{121}{8}$, on a alors :

- $a = 2 > 0$;
- $\alpha = -\frac{3}{4}$
- $\beta = -\frac{121}{8}$

Donc la droite d'équation $x = -\frac{3}{4}$ est un axe de symétrie de la parabole : \mathcal{C}_P . De plus, $\left(-\frac{3}{4}, -\frac{121}{8}\right)$ est le sommet de la parabole \mathcal{C}_P et comme $a > 0$ on peut affirmer que $-\frac{121}{8}$ est le minimum de la fonction P sur \mathbb{R} .

À savoir faire 5 : Déterminer l'axe de symétrie et le sommet d'une parabole

Déterminer l'axe de symétrie et le sommet de chacune des paraboles suivantes :

1. $y = x^2$

2. $y = (x - 3)^2$

3. $y = -x^2 + 4x - 5$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

À savoir faire 6 : Retrouver l'expression d'une fonction polynomiale à partir de son graphe

Nous représentons le graphe de P une fonction polynomiale, dans un repère orthonormé du plan.

Démonstration :

Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction polynomiale de degré deux.

Montrons que f est décroissante (respectivement croissante) sur $] -\infty, \alpha]$ puis croissante (respectivement décroissante) sur $[\alpha, +\infty[$ si $a > 0$ (respectivement $a < 0$).

Pour cela utilisons la forme canonique de f . On sait qu'il existe α et β deux réels tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

Considérons $a > 0$: (le cas où $a < 0$ est quasi identique)

Soit $x_1, x_2 \in] -\infty, \alpha]$ tel que : $x_1 < x_2 \leq \alpha = -\frac{b}{2a}$, on a alors :

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{b}{2a} &\leq x_2 + \frac{b}{2a} \leq 0 \\ \left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 &\geq \left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 \quad \text{car la fonction } x \mapsto x^2 \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_- \\ a\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 &\geq a\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 \quad \text{car } a > 0 \\ a\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} &\geq a\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\ f(x_1) &\geq f(x_2) \end{aligned}$$

D'où f est décroissante sur $] -\infty, \alpha]$. Regardons maintenant sur $[\alpha, +\infty[$.

Soit $x_1, x_2 \in [\alpha, +\infty[$ tel que : $\alpha \leq x_1 < x_2 = -\frac{b}{2a}$, on a alors :

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{b}{2a} &\leq x_2 + \frac{b}{2a} \leq 0 \\ \left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 &\leq \left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 \quad \text{car la fonction } x \mapsto x^2 \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+ \\ a\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 &\leq a\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 \quad \text{car } a > 0 \\ a\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} &\leq a\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\ f(x_1) &\leq f(x_2) \end{aligned}$$

D'où f est croissante sur $[\alpha, +\infty[$.

Montrons maintenant que, dans le cas où $a > 0$, f admet pour minimum β atteint au point d'abscisse α .

Une nouvelle utilisons la forme canonique de f . On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} (x - \alpha)^2 &\geq 0 \\ a(x - \alpha)^2 &\geq 0 \quad \text{car } a > 0 \\ a(x - \alpha)^2 + \beta &\geq \beta \\ f(x) &\geq \beta \end{aligned}$$

■

Exemple :

En reprenant toujours la même fonction polynomiale du second degré qu'à l'exemple précédent :

$$P : x \mapsto 2x^2 + 3x - 14$$

Partie IV Exercices

A - Fonction polynomiale

★☆☆☆☆ EXERCICE 1 (Degré) (✓)

Déterminer le degré de chacune des fonctions polynomiales suivantes :

1. $f : x \mapsto 3x^5 + x^2 - 3$

4. $f : x \mapsto x^3 + 2x - 2$

2. $f : x \mapsto 1 + 9x + 4x^8$

5. $f : x \mapsto -6x^{201} + 4x^{102} + 8$

3. $f : x \mapsto x^2 - 2x^4 + 6x^3$

6. $f : x \mapsto x^2 - 2x^4 + 6x^3$

★★☆☆☆ EXERCICE 2 (Polynôme ?) (✓)

Dire si les fonctions suivantes des fonctions polynomiales ou non? Si oui, donner le degré de ce polynôme et lorsque cela est possible donner le coefficient quadratique, linéaire et constant associé à chaque polynôme.

1. $f : x \mapsto x^2x + 1$

5. $f : x \mapsto x^3 + 2x - 2019$

2. $f : x \mapsto -\sqrt{2} + x - 3x^2$

6. $f : x \mapsto \frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} + 9$

3. $f : x \mapsto x^2 + 3\sqrt{x} - 2$

7. $f : x \mapsto 3x^2 - 3$

4. $f : x \mapsto \frac{x^2 + 3x - 2}{x^2 + x + 1}$

8. $f : x \mapsto \frac{x^2 + 8x - 19}{15}$

★★★☆☆ EXERCICE 3 (Sans développer) (✓)

Sans développer entièrement les expressions, donner pour chaque fonction polynomiale son degré et son coefficient dominant.

1. $f : x \mapsto (x^2 + x - 8)(x^3 - 2x^2 + x + 2)$

4. $f : x \mapsto (x^3 + 2x - 2)(-2x^5 + 6x^3 - 7x)$

2. $f : x \mapsto (2x^2 + 3x + 4)(5x^5 + 3x^3 - 7x)$

5. $f : x \mapsto (-6x^{201} + 4x^{102} + 8)(x^{28} + 6x^{10} - 9)$

3. $f : x \mapsto (x^2 - 2x^4 + 6x^3)(2x - 9)$

6. $f : x \mapsto (x^3 - 2x^2 + 1)(1 - 3x + 2x^2)$

★★★☆☆ EXERCICE 4 (Et sans rien ?) (✓)

Soient P, Q et R trois polynômes de degrés respectifs 2, 3 et 5. Donner le degré des polynômes PQ, PR, QR et PQR .

B - Forme canonique

★★★☆☆ EXERCICE 5 (Forme canonique) (✓)

Déterminer la forme canonique de chaque fonction polynomiale, et factoriser dès que cela est possible.

1. $f : x \mapsto x^2 + 2x - 3$

5. $f : x \mapsto x^2 - 7x + 10$

9. $f : x \mapsto 5x^2 - 8x - 3$

2. $f : x \mapsto x^2 + 4x - 9$

6. $f : x \mapsto x^2 + 15x + 30$

10. $f : x \mapsto -5x^2 + 12x + 3$

3. $f : x \mapsto x^2 + 6x - 1$

7. $f : x \mapsto 2x^2 + 4x - 3$

11. $f : x \mapsto -4x^2 - 10x + 2$

4. $f : x \mapsto x^2 - 10x + 10$

8. $f : x \mapsto 3x^2 - x + 9$

12. $f : x \mapsto -2x^2 - 6x + 3$

★★★☆☆ EXERCICE 6 (Coefficients)..... (↻)

Pour un polynôme P , notons : $P(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ la forme canonique de P . Donner la forme canonique et préciser les valeurs des coefficients a , α et β pour chacune des fonctions polynomiales suivantes :

1. $f : x \mapsto 5 - 6(x+2)^2$

3. $f : x \mapsto 4(x-3)(x+2)$

2. $f : x \mapsto 2x - 3x^2 - 1$

4. $f : x \mapsto -\pi x^2 + 2x$

C - Courbe représentative

★★☆☆☆ EXERCICE 7 (Tracer)..... (↻)

Soit f une fonction polynomiale du second degré.

Tracer la représentation graphique \mathcal{P} de f dans un repère orthonormé tel que :

- f admet 4 pour maximum sur \mathbb{R} ;
- f est croissante uniquement sur $] -\infty, -2]$;
- \mathcal{P} passe par le point de coordonnées $(0, 3)$.

★★★☆☆ EXERCICE 8 (Tableau de variations)..... (↻)

Établir le tableau de variations de chacune des fonctions polynomiales suivantes :

1. $f : x \mapsto x^2 + 2x - 3$

4. $f : x \mapsto 2x^2 + 4x - 3$

2. $f : x \mapsto x^2 - 7x + 10$

5. $f : x \mapsto 3x^2 - x + 9$

3. $f : x \mapsto x^2 + 15x + 30$

6. $f : x \mapsto -5x^2 + 12x + 3$

★★☆☆☆ EXERCICE 9 (Extremum)..... (↻)

Déterminer l'extremum de chacune des fonctions polynomiales suivantes :

1. $f : x \mapsto 6(x-2)^2 - 7$

2. $f : x \mapsto -3(x+4)^2 - 2$

★★★☆☆ EXERCICE 10 (Étude #1)..... (↻)

Soit $f : x \mapsto 5(x-1)^2 - 3$ définie sur \mathbb{R} .

1. Démontrer que f est décroissante sur $] -\infty, 1]$.
2. Dresser le tableau de variations de f sur \mathbb{R} .
3. Déterminer l'extremum de f sur \mathbb{R} .

★★★☆☆ EXERCICE 11 (Étude #2)..... (↻)

Soit $f : x \mapsto 2(x-3)^2 - 8$ définie sur \mathbb{R} .

1. Déterminer la forme factorisée et sa forme développée de f .
2. Sans démonstration, donner :
 - (a) l'axe de symétrie et le sommet de la parabole représentant la fonction f ;
 - (b) le signe de f sur \mathbb{R}

★★★☆☆ EXERCICE 12 (Inéquation)..... (↻)

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

1. $(x-3)^2 \leq 36$

2. $3(x+1)^2 - 8 \leq 4$

3. $2(x+1)^2 - 4 \geq 10$

4. $-5(x-2)^2 \geq 10$

★★★☆☆ EXERCICE 13 (Optimisation) (1)

Soient M un point du segment $[AB]$ de longueur 1 et deux carrés de côtés respectifs $[AM]$ et $[MB]$.

Notons $AM = x$ et $A(x) = AM^2 + MB^2$

1. Exprimer $A(x)$ en fonction de x .
2. Pour quelle position du point M , $A(x)$ est minimale?