# Ensembles des matrices carrées

## Plan du chapitre

# Partie I Matrices remarquables

## A - Matrices diagonales

**Définition 1 : Coefficients diagonaux**

Considérons $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée, on appelle **coefficients diagonaux** de la matrice $A$ les coefficients $a_{ii}$ avec $1 \leq i \leq n$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

**Exemple :**

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, les coefficients diagonaux de la matrice $A$ sont : ......................................

..........................................................................................

**Définition 2 : Matrice diagonale**

Une matrice carrée dont tous les coefficients non-diagonaux sont nuls est appelée **matrice diagonale**. C'est-à-dire, on a $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonale si $i \neq j \in [\![1, n]\!]$ alors $a_{ij} = 0$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

**Information :** Quand $A$ est une matrice diagonale, on note parfois $A = \text{Diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$.
On notera $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles diagonales d'ordre $n$.

**À savoir faire 1 : Matrice diagonale**

1. Donner la matrice diagonale $A$ d'ordre 4 dont les coefficients diagonaux sont égaux à la numéro de ligne.

   ..........................................................................................

   ..........................................................................................

   ..........................................................................................

   ..........................................................................................

2. Et la matrice $B$ dont les coefficients diagonaux sont égaux à la numéro de colonnes.
   Que peut-on dire sur $A$ et $B$ ?

   ..........................................................................................

   ..........................................................................................

   ..........................................................................................

   ..........................................................................................

**Propriété 1 :**

L'ensemble des matrices diagonales est stable par combinaison linéaire et par produit.

***Démonstration* :**

Considérons $A, B$ deux matrices matrices diagonales d'ordre $n$ telles que :

$$A = \text{Diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}) \quad \text{et} \quad B = \text{Diag}(b_{11}, b_{22}, \cdots, b_{nn})$$

- Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ on a alors pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$ :

$$\begin{aligned}(\lambda A + B)_{ij} &= \lambda (A)_{ij} + (B)_{ij} \\ &= \lambda a_{ij} + b_{ij} \\ &= \begin{cases} \lambda 0 + 0 & \text{si } i \neq j \\ \lambda a_{ii} + b_{ii} & \text{si } i = j \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \lambda a_{ii} + b_{ii} & \text{si } i = j \end{cases}\end{aligned}$$

  D'où $\lambda A + B$ est une matrice diagonale.
- On a :

$$\begin{aligned}(AB)_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \\ &= \begin{cases} a_{ii} b_{ij} + a_{ij} b_{jj} & \text{si } i \neq j \\ a_{ii} b_{ii} & \text{si } i = j \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ a_{ii} b_{ii} & \text{si } i = j \end{cases}\end{aligned}$$

  D'où $AB$ est une matrice diagonale.

■

De plus, d'après ce que l'on vient de démontrer on a :

**Propriété 2 : Produit matrice diagnole**

Le produit de deux matrices diagonales est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les produits respectifs des deux matrices diagonales.
C'est-à-dire :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}$$

On retiendra :

$$\text{Diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})\text{Diag}(b_{11}, b_{22}, \cdots, b_{nn}) = \text{Diag}(a_{11}b_{11}, a_{22}b_{22}, \cdots, a_{nn}b_{nn})$$

## B - Matrices scalaires

**Définition 3 : Matrice scalaire**

Une **matrice scalaire** est une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont égaux.
C'est-à-dire, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est scalaire s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_n$.

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

**Exemple :**

On a $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2I_3$ est une matrice scalaire.

**Propriété 3 :**

L'ensemble des matrices scalaire est stable par combinaison linéaire et par produit.

***Démonstration* :**

Considérons $A, B$ deux matrices matrices scalaire d'ordre $n$ telles que :

$$A = \alpha I_n \quad \text{et} \quad B = \beta I_n$$

- Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ on a alors :

$$\begin{aligned} \lambda A + B &= \lambda \alpha I_n + \beta I_n \\ &= (\lambda \alpha + \beta) I_n \end{aligned}$$

D'où $\lambda A + B$ est une matrice scalaire.

- On a :

$$\begin{aligned} AB &= (\alpha I_n)(\beta I_n) \\ &= \alpha \beta I_n \end{aligned}$$

D'où $AB$ est une matrice scalaire.

■

## C - Matrices triangulaires

**À savoir faire 2 : Triangulaire supérieure/ inférieure**

Pour une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on différenciera trois parties pour une matrice :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

La partie triangulaire inférieure, la partie diagonale, la partie triangulaire supérieure.

Que doivent vérifier les indices des coefficients se trouvant sur la partie :

- triangulaire inférieure ? ..........................................................................................
- diagonale ? ..........................................................................................
- triangulaire supérieure ? ..........................................................................................

**Définition 4 : Matrice triangulaire**

- On dit qu'une matrice $A$ est une **matrice triangulaire supérieure** de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ si :

$$\text{pour tout } i, j \in [\![1, n]\!],\quad i > j \ \text{ alors } \ a_{ij} = 0$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots\ 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Une matrice est appelée **triangulaire supérieure stricte** si :

$$\text{pour tout } i, j \in [\![1, n]\!],\quad i \geq j \ \text{ alors } \ a_{ij} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix}$$

- On dit qu'une matrice $A$ est une **matrice triangulaire inférieure** de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ si :

$$\text{pour tout } i, j \in [\![1, n]\!],\quad i < j \ \text{ alors } \ a_{ij} = 0$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Une matrice est appelée **triangulaire inférieure stricte** si :

$$\text{pour tout } i, j \in [\![1, n]\!],\quad i \leq j \ \text{ alors } \ a_{ij} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & & 0 \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

**Information :**

- On note $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $\mathscr{T}_n^-(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures)
- On a $\mathscr{D}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{T}_n^+(\mathbb{R}) \cap \mathscr{T}_n^-(\mathbb{R})$

**À savoir faire 3 : Matrices triangulaires**

Soient $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} a' & b' & c' \\ 0 & d' & e' \\ 0 & 0 & f' \end{bmatrix}$ deux matrices réelles d'ordre 3.

1. Déterminer $\lambda A + B$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

............................................................................................................
............................................................................................................
............................................................................................................
............................................................................................................

2. Déterminer $AB$.

............................................................................................................
............................................................................................................
............................................................................................................
............................................................................................................
............................................................................................................
............................................................................................................

**Propriété 4 :**

- L'ensemble des matrices triangulaire supérieures (resp. inférieures) est stable par combinaison linéaire et par produit;
- L'ensemble des matrices triangulaire supérieures (resp. inférieures) strictes est stable par combinaison linéaire et par produit;

***Démonstration*** **:**

Démontrons le résultat uniquement pour l'ensemble des matrices triangulaire supérieures (strictes), la preuve est analogue dans l'autre cas.

- **Stabilité par combinaison linéaire**
  - Soient $A$ et $B$ deux matrices triangulaires supérieures et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors pour $i > j$ :

$$\begin{aligned}(\lambda A+B)_{ij} &= \lambda a_{ij}+b_{ij}\\ &= \lambda 0+0\\ &= 0\end{aligned}$$

  Car $A$ est triangulaire supérieure et $B$ est triangulaire supérieure.
  D'où $\lambda A+B$ est une matrice triangulaire supérieure.
  - Pour $A$ et $B$ deux matrices triangulaires supérieures strictes la preuve est identique au point près que qu'on va considérer $i \geq j$.
- **Stabilité par produit**
  - Soient $A$ et $B$ deux matrices triangulaires supérieures. On a alors pour $i > j$ :

$$\begin{aligned}(AB)_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}b_{kj}}_{a_{ik}=0 \text{ car } i>k} + + \underbrace{\sum_{k=i}^{n} a_{ik}b_{kj}}_{b_{kj}=0 \text{ car } k\geq i>j}\\ &= 0\end{aligned}$$

  D'où $AB$ est une matrice triangulaire supérieure.
  - Pour $A$ et $B$ deux matrices triangulaires supérieures strictes la preuve est identique au point près que qu'on va considérer $i \geq j$.

■

**Propriété 5 : Coefficient diagonaux produit matrice triangulaire**

Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}, B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices triangulaires supérieures alors la matrice $AB$ a pour coefficient diagonaux : $((a_{ii}b_{ii})_{1\leq i\leq n}$.

***Démonstration :***

Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices triangulaires supérieures on a alors pour tout $1 \leq i \leq n$ :

$$\begin{aligned}(AB)_{ii} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}\\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}b_{ki}}_{a_{ik}=0 \text{ car } i>k} + a_{ii}b_{ii} + \underbrace{\sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}b_{ki}}_{b_{ki}=0 \text{ car } k>i}\\ &= a_{ii}b_{ii}\end{aligned}$$

■

**Information :** Le résultat reste vrai pour deux matrices triangulaires inférieures.

**Exemple :**

Soit $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ $A$ est triangulaire supérieure et pour tout entier naturel $k$ on a :

$$A^k = \begin{bmatrix} 3^k & \star & \star \\ 0 & (-1)^k & \star \\ 0 & 0 & 7^k \end{bmatrix}$$

## D - Matrices symétriques et antisymétriques

**Définition 5 : Matrice symétrique, antisymétrique**

Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que :

- $A$ est **symétrique** si ${}^tA = A$, c'est-à-dire si :

$$\text{pour tout } i,j \in [\![1,n]\!],\ a_{ij} = a_{ji}$$

*analogie : notion de fonction paire*

- $A$ est **antisymétrique** si ${}^tA = -A$, c'est-à-dire si :

$$\text{pour tout } i,j \in [\![1,n]\!],\ a_{ij} = -a_{ji}$$

*analogie : notion de fonction impaire*

**Exemple :**

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ est une matrice symétrique et $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -5 \\ -1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ est une matrice antisymétrique.

**Propriété 6 : Coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique**

Une matrice antisymétrique a nécessairement des coefficients diagonaux égaux à 0

***Démonstration :***

En effet, pour $A$ une matrice antisymétrique on a pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ :

$$a_{ii} = -a_{ii} \Leftrightarrow 2a_{ii} = 0 \Leftrightarrow a_{ii} = 0$$

■

**Propriété 7 :**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ :

- L'ensemble des matrices symétriques $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est stable par combinaison linéaire ;
- L'ensemble des matrices antisymétriques $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ est stable par combinaison linéaire.

***Démonstration :***

- Soient $A, B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} {}^t(\lambda A + B) &= {}^t(\lambda A) + {}^tB \\ &= \lambda {}^tA + {}^tB \\ &= \lambda A + B \end{aligned}$$

D'où $\lambda A + B$ est une matrice symétrique.

- Soient $A, B \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} {}^t(\lambda A + B) &= {}^t(\lambda A) + {}^tB \\ &= \lambda {}^tA + {}^tB \\ &= -\lambda A - B \\ &= -(\lambda A + B) \end{aligned}$$

D'où $\lambda A + B$ est une matrice antisymétrique.

■

**À savoir faire 4 : Somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique**

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, démontrer que :

1. $\dfrac{M + {}^tM}{2}$ est une matrice symétrique.

   ..........................................................................................................

   ..........................................................................................................

   ..........................................................................................................

   ..........................................................................................................

   ..........................................................................................................

   ..........................................................................................................

2. $\dfrac{M - {}^tM}{2}$ est une matrice antisymétrique.

   ..........................................................................................................

   ..........................................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

3. Démontrer que $M = S + A$ avec $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

*On vient alors de démontrer que toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est somme d'une matrice symétrique et antisymétrique.*

**Information :** La transposée d'une matrice triangulaire supérieure est une matrice triangulaire inférieure.

**À savoir faire 5 : Matrice symétrique et antisymétrique**

Existe-t-il une matrice symétrique et antisymétrique ?

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

# Partie II Calcul de puissances

## A - Définition

**Définition 6 : Puissance $k$-ième**

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, avec $n \geq 1$.
On définit par récurrence la matrice $A^p$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ comme étant :

$$A^0 = I_n, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad A^{k+1} = A \times A^k = A^k \times A$$

De manière plus explicite, il s'agit d'un produit de $p$ matrices, toutes égales à $A$ :

$$A^k = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois}}$$

**À savoir faire 6 : Calcul de puissance d'une matrice**

1. Pour $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, déterminer $A^3$.

....................................................................................................
....................................................................................................
....................................................................................................
....................................................................................................
....................................................................................................
....................................................................................................
....................................................................................................
....................................................................................................
....................................................................................................
....................................................................................................

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer les puissances $n$-ièmes de $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

....................................................................................................
....................................................................................................
....................................................................................................
....................................................................................................
....................................................................................................
....................................................................................................
....................................................................................................
....................................................................................................
....................................................................................................
....................................................................................................
....................................................................................................
....................................................................................................
....................................................................................................
....................................................................................................
....................................................................................................
....................................................................................................
....................................................................................................
....................................................................................................
....................................................................................................
....................................................................................................
....................................................................................................
....................................................................................................
....................................................................................................
....................................................................................................
....................................................................................................
....................................................................................................

....................................................................................................
....................................................................................................
....................................................................................................
....................................................................................................
....................................................................................................
....................................................................................................
....................................................................................................
....................................................................................................
....................................................................................................

**Information :** Le calcul des puissances itérées d'une matrice est généralement long et fastidieux, nous verrons dans cette section quelques techniques pour y parvenir.

**Propriété 8 :**

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $p, q \in \mathbb{N}$, on a alors :

- $A^p \times A^q = A^{p+q}$
- $(A^p)^q = A^{pq}$

***Démonstration* :**

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

- $A^p \times A^q = \left(\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{p \text{ fois}}\right) \times \left(\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{q \text{ fois}}\right) = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{p+q \text{ fois}} = A^{p+q}$
- $(A^p)^q = \left(\underbrace{A^p \times A^p \times \cdots \times A^p}_{q \text{ fois}}\right) = A^{p+\cdots+p} = A^{pq}$

■

**Erreur fréquente :** En revanche, nous n'avons pas en général $(AB)^k \neq A^k B^k$.

## B - Puissance d'une matrice diagonale

**Propriété 9 : Puissance d'une matrice diagonale**

Soit $D = \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$ une matrice diagonale, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ :

$$D^k = \text{Diag}\left(\lambda_1^k, \cdots, \lambda_n^k\right) = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

**Information :** Cette proposition qui peut paraître anecdotique, sera particulièrement utile lorsque vous étudierez les matrices diagonalisables.

***Démonstration :***

Soient $D = \text{Diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ et $k \in \mathbb{N}^*$ démontrons par récurrence la propriété suivante :

$$\mathscr{P}(k) : « D^k = \text{Diag}(\lambda_1^k, \cdots, \lambda_n^k) »$$

- **Initialisation :** Pour $k = 1$

$$D^1 = \text{Diag}(\lambda_1^1, \cdots, \lambda_n^1) = \text{Diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$$

- **Hérédité :** Supposons la propriété $\mathscr{P}(k)$ vraie pour un entier $k \in \mathbb{N}^*$.
Démontrons la propriété au rang $k+1$.

$$\begin{aligned} D^{k+1} &= D^k \times D \\ &= \text{Diag}(\lambda_1^k, \cdots, \lambda_n^k) \times \text{Diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \\ &= \text{Diag}(\lambda_1^k \times \lambda_1, \cdots, \lambda_n^k \times \lambda_n) \\ &= \text{Diag}(\lambda_1^{k+1}, \cdots, \lambda_n^{k+1}) \end{aligned}$$

- **Conclusion :** La propriété $\mathscr{P}$ a été initialisé au rang $k = 1$ et est héréditaire donc d'après le principe de récurrence la propriété $\mathscr{P}$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

■

**À savoir faire 7 : Puissance d'une matrice diagonale**

Pour $M = \begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{bmatrix}$ avec $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Démontrer que $M^3 = I_2$

........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................

## C - Binôme de Newton

**À savoir faire 8 : Identité remarquable pour les matrices ?**

Considérons $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. Montrer que :

$$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$

........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Propriété 10 : Puissance 2**

Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \underbrace{\neq A^2 + 2AB + B^2}_{\text{sauf si } A, B \text{ commutent}}$$

***Démonstration :***

Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ on a :

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= (A+B)(A+B)\\ &= A^2 + AB + BA + B^2\end{aligned}$$

Or on a $AB + BA = 2AB$ si, et seulement si, $A$ et $B$ commutent. ■

**Attention :** Il faudra alors faire très attention lors des calculs de puissances de matrices, et de manière plus global sur le calcul de produit de matrices. Il n'y a pas de commutativité dans l'espace des matrices à la différence de l'espace des nombres réels ou complexes.

On rappelle la formule du binôme de Newton pour des nombres réels $x, y$ et $m \in \mathbb{N}$ :

$$(x+y)^m = \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} x^k y^{m-k}$$

Énonçons dans quel cas le formule du binôme de Newton s'applique :

**Propriété 11 : Binôme de Newton pour les matrices**

Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices qui **commutent**, c'est-à-dire telles que :

$$AB = BA$$

Alors dans ce cas, pour tout $m \in \mathbb{N}$ :

$$(A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k}$$

**Information :** Pour des réels ou complexes, la formule du binôme ne faisait pas apparaître une telle hypothèse de commutativité, car deux réels ou deux complexes commutent toujours !

**À retenir :** Toute matrice carrée commute avec l'identité !

***Démonstration :***

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices qui commutent et $p \in \mathbb{N}$ démontrons par récurrence la propriété suivante :

$$\mathscr{P}(p) : « (A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k} »$$

- **Initialisation :** Pour $p = 0$
  - D'une part : $(A+B)^0 = I_n$ ;

- D'autre part : $\sum\limits_{k=0}^{0} \binom{0}{k} A^k B^{-k} = A^0 B^0 = I_n$

D'où on a bien : $(A+B)^0 = \sum\limits_{k=0}^{0} \binom{0}{k} A^k B^{-k}$.

▶ **Hérédité :** Supposons la propriété $\mathscr{P}(p)$ vraie pour un entier $p \in \mathbb{N}$.
Démontrons la propriété au rang $p+1$.

$$\begin{aligned}
(A+B)^{p+1} &= (A+B)(A+B)^p \\
&= (A+B)\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}A^kB^{p-k} \qquad \textit{linéarité de la somme} \\
&= \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}A^{k+1}B^{p-k} + \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}BA^kB^{p-k} \qquad \textit{A et B commutent} \\
&= \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}A^{k+1}B^{p-k} + \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}A^kB^{p+1-k} \qquad i = k+1 \\
&= \sum_{i=1}^{p+1}\binom{p}{i-1}A^iB^{p-i+1} + \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}A^kB^{p+1-k} \\
&= \binom{p}{p}A^{p+1}B^0 + \sum_{i=1}^{p}\binom{p}{i-1}A^iB^{p-i+1} + \sum_{k=1}^{p}\binom{p}{k}A^kB^{p+1-k} + \binom{n}{0}A^0B^{n+1-0} \\
&= A^{p+1} + \sum_{k=1}^{p}\left(\binom{p}{k-1}+\binom{p}{k}\right)A^kB^{p+1-k} + B^{n+1} \qquad \textit{formule de Pascal} \\
&= A^{p+1} + \sum_{k=1}^{p}\binom{p+1}{k}A^kB^{p+1-k} + B^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{p+1}\binom{p+1}{k}A^kB^{p+1-k}
\end{aligned}$$

▶ **Conclusion :** La propriété $\mathscr{P}$ a été initialisé au rang $p=0$ et est héréditaire donc d'après le principe de récurrence la propriété $\mathscr{P}$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$.

■

**À retenir :** La plupart du temps, les matrices $A$ et $B$, du binôme de Newton, ne seront pas données explicitement. Un premier enjeu sera donc de pouvoir décomposer une matrice donnée en une somme $A+B$ avec $A$ et $B$ qui commutent.

**À savoir faire 9 : Application du binôme de Newton**

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Montrer que $A^n = \begin{bmatrix} 1 & p & 2p \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................

## D - Matrices nilpotentes

**Définition 7 : Matrice nilpotente**

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors :

- $A$ est dite **nilpotente** s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0_n$ ;
- Dans ce cas, l'**indice de nilpotence** est le plus petit exposant $k$ vérifiant :

$$A^k = 0_n$$

**À savoir faire 10 : Nilpotence**

1. Montrer que $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ est nilpotente.

   *Une matrice triangulaire stricte est une matrice nilpotente.*

2. Montrer que $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ est nilpotente.
   *Les matrices nilpotentes ne sont pas les matrices triangulaires strictes.*

   ..........................................................................................................
   ..........................................................................................................
   ..........................................................................................................
   ..........................................................................................................
   ..........................................................................................................
   ..........................................................................................................
   ..........................................................................................................
   ..........................................................................................................
   ..........................................................................................................
   ..........................................................................................................

**À retenir :** L'intérêt d'une matrice nilpotente est qu'il est facile de calculer ses puissances car elles s'annulent toutes à partir d'un certain rang.
C'est pourquoi pour calculer les puissances d'une matrice on va chercher à décomposer notre matrice en une somme $A+B$ avec $A$ et $B$ qui commutent **et** nous chercherons à avoir $B$ nilpotente.

**Méthode 1 : Binôme et matrice nilpotente**

- Si on arrive à écrire une matrice $M$ comme somme d'une matrice diagonale et d'une matrice nilpotente $N$, qui **commutent** en utilisant le binôme matricielle on a alors :

$$M^p = (D+N)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} D^{p-k} N^k$$

  Supposons que $N$ est nilpotente d'indice de nilpotence $k_0$ alors : $N^k = 0$ pour tout $k \geq k_0$.
  Et on a pour $p \geq k_0$ :

$$\begin{aligned} M^p &= (D+N)^p \\ &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} D^{p-k} N^k \\ &= \sum_{k=0}^{k_0-1} \binom{p}{k} D^{p-k} N^k + \underbrace{\sum_{k=k_0}^{p} \binom{p}{k} D^{p-k} N^k}_{=0} \end{aligned}$$

- On peut toujours écrire une matrice $B$ sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} B^p &= (B - In + I_n)^p \\ &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (B - I_n)^k I_n^{p-k} \end{aligned}$$

**ou alors :**

$$\begin{aligned}
B^p &= (B + In - I_n)^p \\
&= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (B + I_n)^k (-I_n)^{p-k} \qquad -I_n \times M = -M \\
&= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} (B + I_n)^k
\end{aligned}$$

**À savoir faire 11 : Puissance, binôme et nilpotence**

1. Soit $A = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$. Calculer $A^p$ pour $p \in \mathbb{N}$.

2. Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $A^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

**Propriété 12 : Puissances d'une matrice triangulaire**

Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire de même type (inférieure ou supérieure).
Alors pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $A^k$ est une matrice triangulaire et ses coefficients diagonaux sont les $(a_{ii})^k$.

***Démonstration :***

On sait que pour deux matrices $A$ et $B$ deux matrices triangulaires de même type alors $(AB)_{ii} = a_{ii}b_{ii}$.
Ainsi on démontre par récurrence que $\left(A^k\right)_{ii} = (a_{ii})^k$ ■

## E - Bonus : Calcul de puissances à l'aide d'un polynôme annulateur

Lorsqu'une matrice satisfait une relation polynomiale, on peut sen servir pour calculer ses puissances. Voyons ce cas au travers d'un exemple :

**À savoir faire 12 : Polynôme annulateur et puissance**

Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$.

1. Vérifier que $A^2 = 3A - 2I_2$.
   *On dira alors que le polynôme $P(X) = X^2 - 3X + 2$ est un polynôme annulateur de la matrice $A$.*

   ........................................................................................................................

   ........................................................................................................................

   ........................................................................................................................

   ........................................................................................................................

   ........................................................................................................................

   ........................................................................................................................

2. Montrer qu'il existe deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ telles que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ A^n = u_n A + v_n I_2.$$

   ........................................................................................................................

   ........................................................................................................................

   ........................................................................................................................

   ........................................................................................................................

   ........................................................................................................................

   ........................................................................................................................

   ........................................................................................................................

   ........................................................................................................................

   ........................................................................................................................

   ........................................................................................................................

   ........................................................................................................................

   ........................................................................................................................

....................................................................................................

....................................................................................................

....................................................................................................

....................................................................................................

3. En déduire $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, en montrant que $(u_n)_n$ satisfait une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

....................................................................................................

....................................................................................................

....................................................................................................

....................................................................................................

....................................................................................................

....................................................................................................

....................................................................................................

....................................................................................................

....................................................................................................

....................................................................................................

....................................................................................................

....................................................................................................

....................................................................................................

....................................................................................................

....................................................................................................

## Partie III Matrices inversibles

On a vu dans le chapitre précédent que la multiplication matricielle ne se comporte pas bien vis-à-vis de la simplification, qui est impossible.
Cherchons à définir la notion de simplification pour l'étendre au cas matriciel, c'est-à-dire :

$$\cancel{A} \times B = \cancel{A} \times C \Rightarrow B = C$$

- **Dans le cas réels :** Pour $b, c \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^*$ tels que :

$$ab = ac$$

Pour simplifier dans ce cas comme $a \neq 0$ on multiplie à gauche et à droite par $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ :

$$ab = ac \Rightarrow (a^{-1}a)b = (a^{-1}a)c \Rightarrow b = c$$

- **Dans le cas matriciels :** Nous ne disposons par encore de $A^{-1}$, l'inverse d'une matrice. Pour la définir deux idées possibles pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ :
  - *Mauvaise idée :* Poser la matrice $A^{-1} = \left(\dfrac{1}{a_{ij}}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ lorsque les coefficients sont tous non nuls.

    Malheureusement dans un cas simple, avec $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ nous avons : $AB \neq I_2$.
  - *Bonne idée :* Penser à la définition de l'inverse d'un nombre réels : $a^{-1}$ est l'inverse de $a$ si :

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1$$

On considéra $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

## A - Définitions et propriétés

**Définition 8 : Matrice inversible**

- Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **inversible** s'il existe une matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$AB = BA = I_n$$

- On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles, appelé *groupe linéaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$*.

**Information :** On verra un peu plus tard dans le chapitre pourquoi on ne peut pas considérer des matrices rectangulaires dans la définition de matrice inversible.

**Propriété 13 : Unicité**

L'inverse d'une matrice, lorsqu'il existe, est unique et est noté $A^{-1}$.

***Démonstration :***

Considérons $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible et considérons $B$ et $B'$ deux inverses de $A$. On a alors :

$$B = BI_n = B(AB') = (BA)B' = I_nB' = B'$$

D'où l'inverse $A$ est unique. ■

En pratique on peut simplifier la définition de matrice inversible :

**Théorème 1 : Inverse à gauche/droite**

- Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors : $AB = I_n \Leftrightarrow BA = I_n$ ;
- Par conséquent, pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ :

$$\begin{aligned} A \text{ est inversible } &\Leftrightarrow \exists B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ AB = I_n \qquad \textit{(inverse à droite)} \\ &\Leftrightarrow \exists B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ BA = I_n \qquad \textit{(inverse à gauche)} \end{aligned}$$

***Démonstration :***

On admettra ce résultat cette année.

**Information :** Cette propriété nous permet d'assurer qu'il n'est pas nécessaire de montrer les deux égalités :

$$\begin{cases} AB = I_n \\ BA = I_n \end{cases}$$

Pour montrer que $B$ est l'inverse de $A$, il nous suffira une seule des deux égalités pour établir l'inverse d'une matrice.

**À savoir faire 13 : Inversibilité**

1. Étudier l'inversibilité de la matrice nulle.

 ..........................................................................................

 ..........................................................................................

 ..........................................................................................

2. Étudier l'inversibilité de la matrice identité.

 ..........................................................................................

 ..........................................................................................

.....................................................................................................

3. Étudier l'inversibilité des matrices homothétiques (matrices scalaires).

.....................................................................................................
.....................................................................................................
.....................................................................................................
.....................................................................................................

4. Soient $A = \begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 2 \end{bmatrix}$ deux matrices d'ordre deux.
   Démontrer que $A$ est inversible d'inverse $B$.

.....................................................................................................
.....................................................................................................
.....................................................................................................
.....................................................................................................

5. Soient $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ et $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ deux matrices d'ordre deux.
   Démontrer que $C$ et $D$ sont deux matrices inversibles.

.....................................................................................................
.....................................................................................................
.....................................................................................................
.....................................................................................................
.....................................................................................................
.....................................................................................................

**À retenir :** L'ensemble des matrices inversibles $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ n'est pas stable par somme.

En effet, dans le cas $n = 2$ on a : $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ pourtant $C + D = 0_2 \notin \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$.

**Propriété 14 : Propriétés de l'inversion**

- **(Inverse d'un produit)** Soient $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $AB$ est inversible et d'inverse : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
  On dira que l'ensemble des matrices inversible est stable par produit.
- **(Inverse d'un inverse)** Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $A^{-1}$ est également inversible d'inverse elle-même :
$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$$
- **(Transposition et inversion)** Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors ${}^{\mathrm{t}}A$ est également inversible d'inverse :
$$\left({}^{\mathrm{t}}A\right)^{-1} = {}^{\mathrm{t}}\left(A^{-1}\right)$$
*La transposition et l'inversion commutent.*
- Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, on a :
$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$$

**À retenir :** L'inversion **échange** l'ordre d'un produit, comme pour la transposition.

***Démonstration :***

- Soient $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ on a alors :

$$\begin{aligned}(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1}\\ &= AI_nA^{-1}\\ &= AA^{-1}\\ &= I_n\end{aligned}$$

D'où $AB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

- Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ on a alors :

$$AA^{-1} = I_n$$

Donc $(A^{-1})^{-1} = A$.

- On rappelle que : ${}^{t}(AB) = {}^{t}B\,{}^{t}A$.
Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, ainsi :

$$\begin{aligned}{}^{t}A\,{}^{t}(A^{-1}) &= {}^{t}(A^{-1}A)\\ &= {}^{t}I_n\\ &= I_n\end{aligned}$$

D'où ${}^{t}A$ reste inversible et $({}^{t}A)^{-1} = {}^{t}(A^{-1})$.

- Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$ on a alors :

$$\begin{aligned}\lambda A\left(\frac{1}{\lambda}A^{-1}\right) &= \frac{\lambda}{\lambda}AA^{-1}\\ &= 1 \times I_n\\ &= I_n\end{aligned}$$

■

**Propriété 15 : Simplification par une matrice inversible**

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, on a alors :

- Pour tout $B, C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $AB = AC \Rightarrow B = C$ ;
- Pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ ($X$ est une matrice colonne), $AX = 0_{n,1} \Rightarrow X = 0_{n,1}$.

***Démonstration :***

- Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $B, C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que :

$$\begin{aligned} & AB = AC\\ \Leftrightarrow\ & A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC)\\ \Leftrightarrow\ & (A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C\\ \Leftrightarrow\ & B = C\end{aligned}$$

*équivalence car A est inversible*

D'où on a bien $AB = AC \Rightarrow B = C$, la réciproque est assez évidente.

- Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telles que :

$$\begin{aligned} & AX = 0_{n,1} \\ \Leftrightarrow\ & A^{-1}(AX) = A^{-1}0_{n,1} \\ \Leftrightarrow\ & (A^{-1}A)X = 0_{n,1} \\ \Leftrightarrow\ & I_n X = 0_{n,1} \\ \Leftrightarrow\ & X = 0_{n,1} \end{aligned}$$

*équivalence car A est inversible*

D'où on a bien $AX = 0_{n,1} \Rightarrow X = 0_{n,1}$, la réciproque est assez évidente.

■

**À savoir faire 14 : Matrice nilpotente et inversion**

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente, étudier l'inversibilité de $A$.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Propriété 16 : Inversibilité de matrices diagonales et triangulaires**

- **(Matrice diagonale)** Soit $M = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. On a alors :

$$M \text{ est inversible} \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ \ \lambda_i \neq 0$$

  Dans ce cas, nous avons :

$$M^{-1} = \mathrm{Diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \cdots, \frac{1}{\lambda_n}\right)$$

- **(Matrice triangulaire)** Soit $M$ une matrice triangulaire tel que $\mathrm{Diag}(M) = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$. On a alors :

$$M \text{ est inversible} \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ \ \lambda_i \neq 0$$

***Démonstration :***

- Soit $M = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
  $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $M$ est inversible alors il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $MB = BM = I_n$.
  Démontrons que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \neq 0$, pour cela raisonnons par l'absurde et supposons par

l'absurde qu'il existe $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $\lambda_{i_0} = 0$. On a alors :

$$\begin{aligned} BM &= B \times \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} C_1(M) & C_2(M) & \dots & 0_{n,1} & \dots & C_n(M) \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} BC_1(M) & BC_2(M) & \dots & B0_{n,1} & \dots & BC_n(M) \end{array}\right] \\ I_n &= \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} BC_1(M) & BC_2(M) & \dots & 0_{n,1} & \dots & BC_n(M) \end{array}\right] \end{aligned}$$

**Absurde** car on sait que la $i_0$-ème colonne de la matrice identité n'est pas égale à la matrice colonne nulle on a plutôt :

$$C_{i_0}(I_n) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \neq 0_{n,1}$$

Ainsi on vient de démontrer par l'absurde que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ on a : $\lambda_i \neq 0$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ on a : $\lambda_i \neq 0$.
On peut alors définir la matrice suivante :

$$B = \text{Diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \cdots, \frac{1}{\lambda_n}\right)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} MB &= \text{Diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)\,\text{Diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \cdots, \frac{1}{\lambda_n}\right) \\ &= \text{Diag}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1}, \cdots, \frac{\lambda_n}{\lambda_n}\right) \\ &= \text{Diag}(1, \cdots, 1) \\ &= I_n \end{aligned}$$

*produit de matrice diagonale*

D'où $M = \text{Diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ est inversible et l'inverse de $M$ est donné par :

$$M^{-1} = \text{Diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \cdots, \frac{1}{\lambda_n}\right)$$

- On admettra ce résultat cette année.

■

## B - Calcul d'un inverse à l'aide d'un polynôme annulateur

Regardons cette méthode sur un exemple

### À savoir faire 15 : Inverse à l'aide d'un polynôme annulateur

Soit $M = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 20 & \end{bmatrix}$

1. Démontrer que la matrice $M$ vérifie la relation $M^2 + 2M - 3I_3 = 0_3$.

   ...............................................................................................................
   ...............................................................................................................
   ...............................................................................................................
   ...............................................................................................................
   ...............................................................................................................
   ...............................................................................................................
   ...............................................................................................................
   ...............................................................................................................

2. En déduire que $M$ est inversible et déterminer l'expression de sa dérivée.

   ...............................................................................................................
   ...............................................................................................................
   ...............................................................................................................
   ...............................................................................................................
   ...............................................................................................................
   ...............................................................................................................
   ...............................................................................................................
   ...............................................................................................................
   ...............................................................................................................
   ...............................................................................................................
   ...............................................................................................................
   ...............................................................................................................

**Attention : Factorisation matricielle**

Pour factoriser par une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dans l'expression :

- on a : $A^3 + A^2 + A = A\left(A^2 + A + \boxed{I_n}\right)$
- et non : $A^3 + A^2 + A = A\left(A^2 + A + \boxed{1}\right)$

### Méthode 2 : Inverse à l'aide d'un polynôme annulateur

Supposons qu'il existe $a_0, a_1, \cdots, a_p \in \mathbb{K}$ non tous nuls et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant :

$$a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_p A^p = 0_n$$

On dit que $P : X \mapsto a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_p X^p$ est un **polynôme annulateur** de $A$.
**Dans le cas où $a_0 \neq 0$ :** on a alors $A$ est inversible d'inverse :

$$A^{-1} = -\frac{a_1}{a_0} I_n - \cdots - \frac{a_p}{a_0} A^{p-1}$$

***Démonstration :***

**Cas où $a_0 \neq 0$ :** On a alors :

$$\begin{aligned} & a_1 A + \cdots + a_p A^p = -a_0 I_n \\ \Leftrightarrow\ & -\frac{1}{a_0}\left(a_1 A + \cdots + a_p A^p\right) = I_n \\ \Leftrightarrow\ & -\frac{a_1}{a_0} A - \cdots - \frac{a_p}{a_0} A^p = I_n \\ \Leftrightarrow\ & A\left(-\frac{a_1}{a_0} I_n - \cdots - \frac{a_p}{a_0} A^{p-1}\right) = I_n \end{aligned}$$

D'où $A$ est inversible et $A^{-1} = -\frac{a_1}{a_0} I_n - \cdots - \frac{a_p}{a_0} A^{p-1}$ ■

**À savoir faire 16 : Polynôme annulateur et inversion**

Montrer que si $A^2 - A = 0_n$ et $A \neq I_n$ alors $A$ n'est pas inversible.

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

## C - Cas $n = 2$

**Définition 9 : Déterminant d'une matrice $2 \times 2$**

Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. On appelle **déterminant** de $A$, noté $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, la quantité :

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

**À retenir : Moyen mnémotechnique**

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = xy' - yx'$$

**Propriété 17 : Inversibilité d'une matrice $2 \times 2$**

Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ alors :

- $A$ est inversible si, et seulement si, $\det A \neq 0$ ;
- En cas d'inversibilité, on a :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

***Démonstration :***

Nous allons commencer par prouver un résultat très utile, en considérant $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ on a alors :

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} \\ &= \det A \; I_2 \end{aligned}$$

Démontrons alors les deux points de la propriété :

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $A$ inversible. Démontrons par l'absurde que $\det A \neq 0$.

Supposons que $\det A = 0$ on a alors :

$$\begin{aligned} AB &= \det A \; I_2 \\ AB &= 0_2 \\ A^{-1}AB &= A^{-1}0_2 \\ B &= 0_2 \end{aligned}$$

*car A est inversible*

Ce qui est absurde car dans ce cas là on aurait : $d = -b = -c = a = 0$ et donc $A = 0_2$ d'où $A$ n'est pas inversible.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $\det A \neq 0$ on a alors :

$$\begin{aligned} AB &= \det A \; I_2 \\ A\left(\frac{1}{\det A}B\right) &= I_2 \end{aligned}$$

D'où $A$ est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}B = \dfrac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ ■

**À savoir faire 17 : Inversibilité d'une matrice** $2 \times 2$

1. Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
   Pour quelles valeurs $\lambda \in \mathbb{K}$ a-t-on la matrice $A - \lambda I_2$ qui est inversible ?

   ..................................................................................................
   ..................................................................................................
   ..................................................................................................
   ..................................................................................................
   ..................................................................................................
   ..................................................................................................
   ..................................................................................................
   ..................................................................................................

2. Pour $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$. Exprimer $\det(A^{-1})$ en fonction de $\det A$.

   ..................................................................................................
   ..................................................................................................
   ..................................................................................................

## D - Matrices semblables

**Définition 10 : Matrices semblables**

- Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $A$ et $B$ sont dites **semblables** s'il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que :
$$A = PBP^{-1}$$
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, deux matrices sont dites **semblables sur** $\mathbb{R}$ s'il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$.

On notera : $A \sim B$.

**Exemple :**

Considérons $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, déterminons une matrice $B$ semblable à $A$.

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

Déterminons les matrices semblables à l'identité.

..........................................................................................................

..........................................................................................................

**Propriété 18 : Puissances et matrices semblables**

Soient $A$ et $B$ deux matrices semblables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, donc il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que : $A = PB^nP^{-1}$. On a alors :
$$\forall n \in \mathbb{N},\quad A^n = \left(PBP^{-1}\right)^n = PB^nP^{-1}$$

***Démonstration* :**

Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices semblables telles qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ :
$$A = PBP^{-1}$$
On démontre par récurrence en posant la propriété :
$$\forall k \in \mathbb{N},\quad \mathscr{P}(k) : « A^k = PB^kP^{-1} »$$

- **Initialisation :** pour $k = 0$
$$A^0 = I_n = PP^{-1} = PB^0P^{-1}$$
- **Hérédité :** Supposons la propriété $\mathscr{P}$ vraie pour un entier $k \in \mathbb{N}$. Montrer que la propriété $\mathscr{P}$ est vraie

au rang $k+1$ on a alors :

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= \left(PBP^{-1}\right)^k \left(PBP^{-1}\right) \\ &= \left(PB^kP^{-1}\right)\left(PBP^{-1}\right) \\ &= PB^kP^{-1}PBP^{-1} \\ &= PB^kBP^{-1} \\ &= PB^{k+1}P^{-1} \end{aligned}$$

- **Conclusion :** La propriété $\mathscr{P}$ a été initialisé au rang 0 et est héréditaire donc d'après le principe de récurrence elle est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

■

**À savoir faire 18 : Puissance et matrice semblable**

1. Démontrer que $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ est inversible.

   ..............................................................................................................................

   ..............................................................................................................................

   ..............................................................................................................................

2. En déduire que $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ et $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ sont semblables.

   ..............................................................................................................................

   ..............................................................................................................................

   ..............................................................................................................................

   ..............................................................................................................................

3. Déterminer l'expression de $A^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

   ..............................................................................................................................

   ..............................................................................................................................

   ..............................................................................................................................

   ..............................................................................................................................

   ..............................................................................................................................

   ..............................................................................................................................

Dans la continuité de l'application précédente, définition une notion qui sera très utile pour le calcul de puissances d'une matrice.

**Définition 11 : Diagonalisable**

Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **diagonalisable** si elle est semblable à une matrice diagonale.
C'est-à-dire s'il existe $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ de sorte que : $A = PDP^{-1}$.

**Corollaire 1 :**

Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si, et seulement si, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $P^{-1}AP$ est diagonale.

**Information :** Cette année, les matrices $P$ et $D$ seront toujours données, vous verrez plus tard des méthodes pour savoir si une matrice est diagonalisable et déterminer, si elles existent, les matrices $P$ et $D$.

**Exemple :**

La matrice nulle, la matrice identité ainsi que tout matrice diagonale sont diagonalisable car :

..................................................................................................

..................................................................................................

..................................................................................................

..................................................................................................

**Méthode 3 : Déterminer les puissances d'une matrice diagonalisable**

1. Diagonaliser la matrice $A$ : *vérifier la relation* $A = PDP^{-1}$ *avec* $D$ *diagonale et* $P$ *inversible*;
   *Cette année les matrices* $P$ *et* $D$ *seront toujours données.*
2. Calculer $D^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
3. $A^n = PD^nP^{-1}$ : *que l'on montre généralement par récurrence.*

**À savoir faire 19 : Puissances d'une matrice diagonalisable**

Considérons $J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ et $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

1. Vérifier que $P$ est inversible.

   ..................................................................................................

   ..................................................................................................

   ..................................................................................................

2. Montrer que $J_2$ est diagonalisable.

   ..................................................................................................

   ..................................................................................................

   ..................................................................................................

   ..................................................................................................

3. En déduire $J_2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   ..................................................................................................

   ..................................................................................................

   ..................................................................................................

   ..................................................................................................

   ..................................................................................................

   ..................................................................................................

# Partie IV Trace d'une matrice

**Définition 12 : Trace**

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
On définit la **trace** de la matrice $A$, notée $\text{Tr}(A)$, comme étant le scalaire :

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

*La trace d'une matrice carrée est la somme des coefficients de sa diagonale.*

**Exemple :**

On a : $\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ et $\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 8 \\ 11 & 0 & -10 \end{bmatrix}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

**Propriété 19 :**

Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

- **(Linéarité de la trace)** Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,
$$\mathrm{Tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \mathrm{Tr}(A) + \mu \mathrm{Tr}(B) \ ;$$
- **(Permutation circulaire)** $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ ;
- **(Transposée)** $\mathrm{Tr}\left({}^{t}A\right) = \mathrm{Tr}(A)$.

***Démonstration :***

- **(Linéarité de la trace)** Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ on a alors :
$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(\lambda A + \mu B) &= \sum_{k=1}^{n} [\lambda A + \mu B]_{kk} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda a_{kk} \mu b_{kk} \\ &= \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{kk} + \mu \sum_{k=1}^{n} b_{kk} \\ &= \lambda \mathrm{Tr}(A) + \mu \mathrm{Tr}(B) \end{aligned}$$
*linéarité de la somme*

- **(Permutation circulaire)**
$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(AB) &= \sum_{k=1}^{n} (AB)_{kk} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{t=1}^{n} a_{kt} b_{tk} \\ &= \sum_{t=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{tk} a_{kt} \\ &= \sum_{t=1}^{n} (BA)_{tt} \\ &= \mathrm{Tr}(BA) \end{aligned}$$
*inversion somme finie*

- **(Transposée)**
$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\left({}^{t}A\right) &= \sum_{k=1}^{n} \left({}^{t}A\right)_{kk} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (A)_{kk} \\ &= \mathrm{Tr}(A) \end{aligned}$$

# Partie V Bonus : Invariant par similitude

**Définition 13 : Invariant de similitude**

Une application $I : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est un **invariant de similitude** si :

$$A \sim B \Rightarrow I(A) = I(B)$$

**À retenir :** Un invariant de similitude est une quantité qui ne varie pas pour deux matrices semblables.

**Propriété 20 : Invariant de trace**

La trace est un invariant de similitude.
C'est-à-dire,

$$A \sim B \Rightarrow \mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$$

***Démonstration :***

En effet pour $A \sim B$ on sait qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que :

$$A = PBP^{-1}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(A) &= \mathrm{Tr}(PBP^{-1}) \\ &= \mathrm{Tr}(BP^{-1}P) \\ &= \mathrm{Tr}(B)\end{aligned}$$

*permutation circulaire*

■

**À retenir :**

$\boxed{\text{Cette propriété est très utile pour savoir si deux matrices } \textbf{ne sont pas semblables}}$.

**À savoir faire 20 : Matrices non semblables et trace**

Les matrices $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 5 & -3 \end{bmatrix}$ sont-elles semblables ?

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

**Attention : Réciproque**

La réciproque est fausse, en effet on sait que la matrice $I_2$ est semblable uniquement à la matrice $I_2$ or on a : $\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right) = 2 = \mathrm{Tr}(I_2)$ pourtant $I_2 \not\sim \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Voyons un nouvel invariant qui peut aider pour démontrer que deux matrices ne sont pas semblables.

**Propriété 21 : Invariant de déterminant**

Le déterminant est un invariant de similitude. C'est-à-dire,

$$A \sim B \Rightarrow \det(A) = \det(B)$$

**Lemme 1 : Permutation circulaire**

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a alors : *On se contentera au cas $n = 2$.*

$$\det(AB) = \det(BA)$$

***Démonstration* :**

Pour le cas $n = 2$ : laisser en exercice.

***Démonstration* :**

En effet pour $A \sim B$ on sait qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que :

$$A = PBP^{-1}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\det A &= \det(PBP^{-1}) \\ &= \det(P^{-1}PB) \\ &= \det(I_n B) \\ &= \det(B)\end{aligned}$$

*permutation circulaire*

■

**À savoir faire 21 : Semblable ?**

Considérons $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

1. En utilisant la trace peut-on affirmer que $A \sim B$ ou $A \nsim B$ ?

   ........................................................................................................................

   ........................................................................................................................

   ........................................................................................................................

   ........................................................................................................................

2. En utilisant le déterminant peut-on affirmer que $A \sim B$ ou $A \nsim B$ ?

   ........................................................................................................................

   ........................................................................................................................

   ........................................................................................................................

   ........................................................................................................................

# Partie VI Exercices

★★⯪☆☆ **Exercice 1** ..........

Pour $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, déterminer $A^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

★★★⯪☆ **Exercice 2** (Expression et inversibilité) ..........

Pour chacune des matrices suivantes, étudier si elle est inversible ou pas et lorsqu'elle est inversible, donner son inverse.

1. $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que : $M^4 - 4M^2 + M - 5I_3 = 0_3$ ;
2. $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que : $A^5 - A = 0_3$ et telle que $A^4 \neq I_3$.

★★★⯪☆ **Exercice 3** (Puissance d'une matrice diagonalisable) ..........

Considérons : $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ et $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

1. Vérifier que $P$ est inversible et que $P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$
2. Montrer que $A$ est diagonalisable.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$A^n = \begin{bmatrix} 2^{2n-1} + 3^n 2^{n-1} & 2^{3n-1} - 3^n 2^{n-1} & -2^{2n-1} + 2^{3n-1} \\ 2^{2n-1} - 3^n 2^{n-1} & 2^{3n-1} + 3^n 2^{n-1} & -2^{2n-1} + 2^{3n-1} \\ -2^{2n-1} + 3^n 2^{n-1} & 2^{3n-1} - 3^n 2^{n-1} & 2^{2n-1} + 2^{3n-1} \end{bmatrix}$$