
Calcul matriciel

Plan du chapitre

I Définitions et notations.....	2
A - Écriture générale d'une matrice.....	2
B - Matrices colonnes, matrices lignes.....	3
II Règle d'algèbre matricielle	4
A - Égalité de matrices	4
B - Somme de matrices et multiplication par un scalaire (multiplication externe)	5
C - Produit de matrices (multiplication interne)	10
III Produit matriciel et effet sur les lignes et les colonnes	17
A - Produit par une colonne	17
B - Produit par une matrice élémentaire	18
IV Transposée d'une matrice	19
V Exercices	22
A - Description d'une matrice	22
B - Calcul matriciel	22
C - Effet sur les lignes et les colonnes.....	24
D - Transposée	24

Introduction

Dans tout ce chapitre l'ensemble noté \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Partie I Définitions et notations

A - Écriture générale d'une matrice

Définition 1 : Matrice

On appelle **matrice** à n lignes et p colonnes à coefficients dans \mathbb{K} toute famille d'éléments de \mathbb{K} indexée par $\llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$. Une telle matrice est dite de **taille** (n, p) .

C'est-à-dire une matrice est une collection d'objets (ici nombres réels ou complexes) rangée et repérée par deux indices $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

Une matrice A à n lignes et p colonnes est notée :

- ▶ sous forme **notation indicée** par $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$
- ▶ sous forme **notation matricielle** qui est un tableau à n lignes et p colonnes :

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{bmatrix}$$

De plus, $a_{i,j}$ (ou plus simplement a_{ij} lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté) est appelé le **coefficient de la ligne i et de la colonne j** de la matrice A .

Information : De la même manière qu'une suite un ensemble (infini) d'objets indicé par n sur \mathbb{N} , une matrice à n lignes et p colonnes est une famille (donc ensemble fini) d'objets indicé par i et j sur $\llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$

Exemple :

Considérons la matrice $A = (i + j)_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 3}}$ sous forme indicée.

- ▶ La matrice A est de taille
- ▶ La matrice A a pour représentation matricielle le tableau suivant :

$$A =$$

À savoir faire 1 : Passer de la notation indicée à la notation matricielle

Considérons la matrice $M = (2^i + 3j)_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 2}}$.

1. Donner la taille de la matrice M
2. Donner la représentation matricielle de la matrice M .

.....

3. Donner, si possible, les coefficients de la matrice M suivant :

- (a) $m_{2,1} = \dots\dots\dots$
- (b) $m_{1,3} = \dots\dots\dots$
- (c) $m_{3,2} = \dots\dots\dots$

⚠ Attention : De la même manière qu'on ne confond pas une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (une famille infinie) et son terme d'indice n : u_n (un nombre réel), on ne confondra pas une matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ (une famille) avec son coefficient d'indice (i, j) noté $a_{i,j}$ (un élément de \mathbb{K})

Définition 2 : Ensemble de matrices

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices $n \times p$ à coefficients dans \mathbb{K} .

🔑 À retenir : Dans le cas où $n = p$ on notera plus simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices (carrées) de taille $n \times n$ ou d'ordre n et on notera plus simplement une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par : $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$.

Exemple :

- Clairement on a :
- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{C}) ;$
 - $\begin{bmatrix} 1+i & -2 \\ 5 & 2i \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C})$, on dira que c'est une matrice carrée d'ordre 2 à coefficient complexe.

B - Matrices colonnes, matrices lignes

Définition 3 : Cas particulier

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, lorsque :

- ▶ $n = 1$: M est une **matrice ligne** et $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices lignes de taille p ;
- ▶ $p = 1$: M est une **matrice colonne** et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices colonnes de taille n .

Exemple :

- $[-i \quad 2+i] \in \mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{C})$ est une matrice ligne de taille 2 à coefficients complexes.
- $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est une matrice colonne de taille 3 à coefficients réels.

Définition 4 : Lignes et colonnes d'une matrice

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de représentation matricielle :

$$\begin{array}{c}
 j\text{-ème colonne} \\
 \downarrow \\
 \begin{array}{cccccc}
 m_{1,1} & m_{1,2} & \cdots & m_{1,j} & \cdots & m_{1,p} \\
 m_{2,1} & m_{2,2} & \cdots & m_{2,j} & \cdots & m_{2,p} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
 m_{i,1} & m_{i,2} & \cdots & m_{i,j} & \cdots & m_{i,p} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\
 m_{n,1} & m_{n,2} & \cdots & m_{n,j} & \cdots & m_{n,p}
 \end{array}
 \end{array}
 \leftarrow i\text{-ème ligne}$$

- Pour $1 \leq i \leq n$: on note $L_i(M) = (m_{i,j})_{1 \leq j \leq p}$ la matrice matrice ligne constituée des coefficients de la i -ème ligne de la matrice M de telle sorte que :

$$L_i(M) = [m_{i,1} \quad m_{i,2} \quad \cdots \quad m_{i,j} \quad \cdots \quad m_{i,p}]$$

- Pour $1 \leq j \leq p$: on note $C_j(M) = (m_{i,j})_{1 \leq i \leq n}$ la matrice matrice colonne constituée des coefficients de la j -ème colonne de la matrice M de telle sorte que :

$$C_j(M) = \begin{bmatrix} m_{1,j} \\ m_{2,j} \\ \vdots \\ m_{n,j} \end{bmatrix}$$

On peut alors noter :

$$M = \begin{bmatrix} L_1(M) \\ L_2(M) \\ \vdots \\ L_n(M) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} C_1(M) & C_2(M) & \dots & C_p(M) \end{array} \right]$$

Partie II Règle d'algèbre matricielle

A - Égalité de matrices

Définition 5 : Égalité

Soit A et B deux matrices, elles sont égales si elles sont de même tailles et ont les mêmes coefficients. Ainsi pour deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a $A = B$ si :

$$\text{pour tout } (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, a_{i,j} = b_{i,j}$$

✂ À savoir faire 2 : Égalité de matrices

$$\text{Soit } A = \begin{bmatrix} i & -1 \\ \sqrt{8} & \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e^{i\frac{\pi}{2}} & i^2 \\ 2\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \text{ et } C = \begin{bmatrix} i & -1 \\ 2\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Donner les égalités éventuelles entre chacune de ces trois matrices.

Exemple :

Pour $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ et $B = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, comme matrices de taille (2,3) on peut effectuer la somme de A et B :

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Définition 7 : Multiplication par un scalaire

Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice et $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire. On note alors la matrice λA définie par :

$$\lambda A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

En notation matricielle on a :

$$\lambda A = \lambda \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{1,1} & \lambda a_{1,2} & \dots & \lambda a_{1,p} \\ \lambda a_{2,1} & \lambda a_{2,2} & \dots & \lambda a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n,1} & \lambda a_{n,2} & \dots & \lambda a_{n,p} \end{bmatrix}$$

Autrement dit, les coefficients de λA sont obtenus en multipliant ceux de A par λ .

Exemple :

Considérons la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. Déterminons :

$$\blacktriangleright 2A = 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$\blacktriangleright -A = - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$\blacktriangleright A + (-A) = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Définition 8 : Matrice nulle

On appelle **matrice nulle** de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice de taille (n, p) ayant tous ses coefficients égaux à 0 :

$$0_{n,p} = (0)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Définition 9 : Matrice opposée

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ on définit la **matrice opposée** de A par $-A = (-a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a :

$$A + (-A) = A - A = 0_{n,p}$$

Les opérations $+$ et \cdot sur les matrices possèdent des propriétés similaires à celle des nombres réels. Les voici :

Propriété 2 : Propriétés de la somme

Soient A, B et C trois matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- **(Associativité)** $(A + B) + C = A + (B + C)$;
- **(Commutativité)** $A + B = B + A$;
- **(Élément neutre)** $0_{n,p}$ est l'élément neutre pour l'addition matricielle :

$$A + 0_{n,p} = 0_{n,p} + A = A ;$$

- **(Élément opposé)** $-A$ est l'opposé de A pour l'addition matricielle :

$$A + (-A) = 0_{n,p}$$

Démonstration :

Soient A, B et C trois matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- **(Associativité)**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- **(Commutativité)**

.....

.....

.....

.....

.....

- **(Élément neutre)**

.....

.....

.....

.....

.....

- **(Élément opposé)**

.....

.....

.....

.....

.....



Propriété 3 : Propriétés de la multiplication externe

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

- **(Associativité)** $(\lambda\mu) \cdot A = \lambda(\mu \cdot A)$;
- **(Élément neutre)** $1 \in \mathbb{K}$ est l'élément neutre de pour la multiplication externe :

$$1 \cdot A = A$$

- **(Distributivité)** $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$ et $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$.

On oubliera très vite le \cdot pour laisser vide l'espace entre un scalaire et une matrice, surtout lorsqu'il n'y aura aucune ambiguïté

Démonstration :

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

- **(Associativité)**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- **(Élément neutre)**

.....

.....

.....

.....

.....

- **(Distributivité)**

▶

.....

.....

.....

.....

.....

▶

.....

.....

.....

.....

.....

Définition 10 : Combinaison linéaire

À l'aide des deux propriétés précédentes on a :

- ▶ Soit $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Une **combinaison linéaire** de A et B est une matrice de la forme $\lambda A + \mu B$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ sont des scalaires, de plus toute combinaison linéaire de A et B est un matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- ▶ Soit $M_1, \dots, M_s \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Une **combinaison linéaire** de M_1, \dots, M_s est une matrice de la forme $\lambda_1 M_1 + \dots + \lambda_s M_s$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{K}$ sont des scalaires, de plus toute combinaison linéaire de M_1, \dots, M_s est un matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exemple :

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ on a :

$$-A + 2B = -\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

est une combinaison linéaire de A et B .

Définition 11 : Matrices élémentaires

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $l \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on définit la matrice $E_{k,l}^{(n,p)}$ ou plus simplement $E_{k,l}$ (lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté), appelée **matrice élémentaire d'indice (k, l) de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$** la matrice constituée de zéros partout sauf pour le coefficient en ligne k et en colonne l , qui lui vaut un. En notation matricielle on a :

$$E_{k,l} = \begin{matrix} & & \text{\color{orange} } l\text{-ème colonne} & & \\ & & \downarrow & & \\ \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \color{orange} 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} & \leftarrow & \text{\color{orange} } k\text{-ème ligne} & & \end{matrix}$$

En notation indicée on a :

$$(E_{kl})_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=k \text{ et } j=l \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple :

Sur $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{K})$ on a :

$$E_{1,2} = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad E_{3,1} = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$$

deux matrices élémentaires.

Définition 12 : Base canonique

On appelle **base canonique** de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices élémentaires $E_{k,l}$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $l \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

De plus, toute matrice de $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire des matrices élémentaires et l'écriture est

unique. En effet, pour $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ on a :

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{bmatrix} = \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

✂ À savoir faire 3 : Décomposer comme combinaison linéaire de matrices élémentaires

1. Décomposer la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ comme combinaison linéaire de matrices $E_{i,j}$ dans $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{K})$.

.....

.....

.....

.....

2. On note $S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ deux matrices carrées d'ordre 2.

Montrer que $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ est combinaison linéaire des matrices $E_{1,1}, E_{2,2}, S$ et A .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C - Produit de matrices (multiplication interne)

Définition 13 : Produit matriciel

Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ deux matrices telles que le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B .

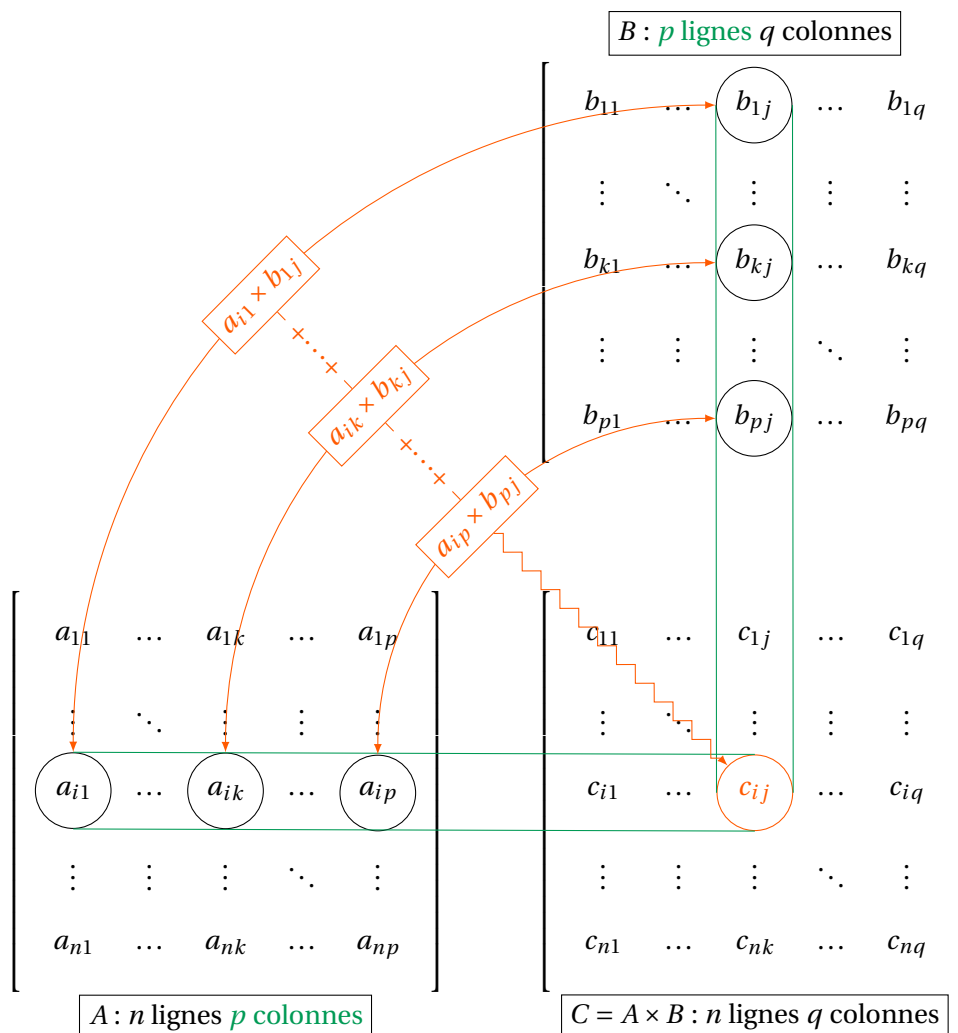
On peut alors définir le **produit matriciel de A par B** et la matrice produit $A \times B = AB$ comme la matrice de format $n \times q$ définie par :

$$A \times B = \left(\sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq q}}$$

Pour alléger les notations, et comme une matrice est entièrement définie par ses coefficients indiqués on notera :

$$\text{pour tout } (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket, (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$$

Le produit matriciel est plus compliqué que la somme matricielle, visuellement en notation matricielle on a :



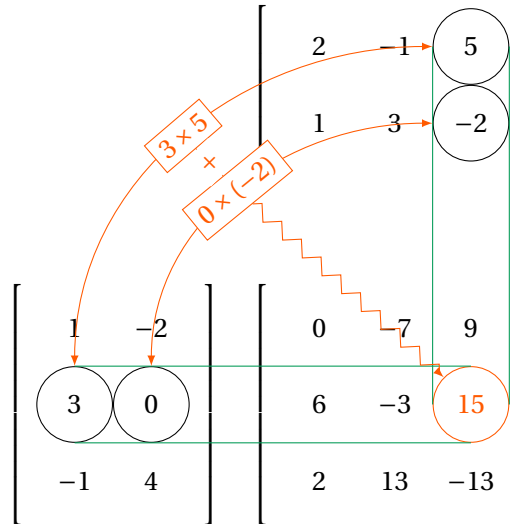
En fixant une ligne i de la matrice A et une colonne j de la matrice B , étant donné que qu'on impose que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B , les deux matrices $L_i(A)$ et $C_j(B)$ sont de même taille (à quelque chose près que l'une est une matrice ligne et l'autre une matrice colonne), en tout cas elles ont le même nombre d'élément.

Nous allons ainsi effectuer la somme des produits des coefficients respectifs de $L_i(A)$ et $C_j(B)$ pour obtenir le coefficient en i -ème ligne et en j -ème colonne de la matrice produit.

Exemple :

Effectuons, si possible, le produit entre $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$.

Comme $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, le nombre de colonnes de A coïncide avec le nombre de lignes de B on peut alors effectuer le produit de A par B .



Au brouillon

En faisant le produit de la **ligne 2** de A par la **colonne 3** de B on obtient de coefficient à la **ligne 2 et colonne 3** de la matrice produit.

Ainsi on a :

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -7 & 9 \\ 6 & -3 & 15 \\ 2 & 13 & -13 \end{bmatrix}$$

⚠ Attention : Format des matrices

Pour effectuer un produit face à face correct entre la matrice A et la matrice B on comprend que le nombre de colonnes de A et le nombre de lignes de B doivent coïncider. On vérifiera toujours bien le format des matrices avant de calculer le produit matriciel de celle-ci.

💡 À retenir : Schéma type « relation de Chasles »

On retiendra que la dimension de la matrice produit (lorsqu'elle est définie) suit un schéma type relation de Chasles :

$$\text{Mat}(n, q) \times \text{Mat}(q, p) = \text{Mat}(n, p)$$

🚫 Erreur fréquente : Non commutativité du produit matriciel

Le format des matrices est l'une des raisons de la non commutativité des matrices, c'est-à-dire, en général

$$AB \neq BA$$

En effet un produit peut-être défini tandis que l'autre non, $\text{Mat}(n, q) \times \text{Mat}(q, p) = \text{Mat}(n, p)$ est défini mais dans l'autre sens non! Le nombre de colonne de $\text{Mat}(q, p)$ ne coïncide pas avec le nombre de ligne de $\text{Mat}(n, q)$. Cependant même si les deux produits sont définies les matrices ne commutent pas forcément.

Considérons : $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

- ▶ D'une part :
-
-

.....

► D'autre part :

.....

.....

.....

✂ À savoir faire 4 : Produit de matrices

Effectuer, si possible, le produit de A par B dans chacun des cas suivants :

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

.....

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

.....

3. $A = [1 \ 3 \ 5 \ 7]$ et $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

.....

4. $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ et $B = [1 \ 3 \ 5 \ 7]$

.....

Définition 14 : Matrices qui commutent

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices carrées. On dit que A et B commutent si $AB = BA$

Information : Matrice carrée de même ordre

Pour deux matrices carrées de **même ordre** le produit dans un sens (AB) et dans l'autre (BA) sont toujours définis. En effet le nombre colonnes et de lignes sont égaux et l'égalité et même entre les deux matrices

Erreur fréquente : Pas de résultat sur les produits nuls ni de simplification

Vous avez au collège qu'un produit (de nombre réels) est nul si, et seulement si, l'un de ses facteurs en nul. Cette propriété est **fausse** pour les matrices. De même, vous avez vu que si pour $a \in \mathbb{C}^*$ et $b, c \in \mathbb{C}$ on a : $ab = ac \Rightarrow b = c$ cette propriété est **fausse** sur les matrices

En effet, considérons : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$

► D'une part calculons :

$$AB = \dots\dots\dots$$

Ainsi :

$$AB = 0 \not\Rightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$$

► D'autre part calculons :

$$AC = \dots\dots\dots$$

Ainsi on ne peut pas simplifier par A :

$$AB = AC \not\Rightarrow B = C$$

Définition 15 : Matrice identité

On appelle matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n de \mathbb{K} , la matrice notée I_n définie comme la matrice carrée d'ordre n n'ayant que des 1 sur la diagonale et des zéros ailleurs. On a alors :

► en notation indicée : pour tout $1 \leq i, j \leq n, (I_n)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

► en notation matricielle :

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Propriété 4 : Propriétés du produit matriciel

Soient n, p, q et r des entiers non nuls et $A, A' \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B, B' \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

- (Linéarité à gauche) $(A + \lambda A') \times B = A \times B + \lambda A' \times B$;
- (Linéarité à droite) $A \times (B + \lambda B') = A \times B + \lambda A \times B'$;
- (Associativité) $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$;
- (Élément neutre) Si $n = p$, c'est-à-dire si A est un matrice carrée on a alors I_n est le neutre pour le produit matriciel sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$I_n \times A = A \times I_n = A$$

.....

.....

.....

.....



Partie III **Produit matriciel et effet sur les lignes et les colonnes**

A - Produit par une colonne

✂ À savoir faire 5 : Pour commencer

Effectuer les produits matricielles suivants :

1. $\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \dots\dots\dots$

2. $\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \dots\dots\dots$

3. $\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \dots\dots\dots$

4. $\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_4 \end{bmatrix} = \dots\dots\dots$

5. $\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \dots\dots\dots$

Propriété 5 : Produit par une colonne

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,

- Le produit de A par la colonne élémentaire $E_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, ayant un 1 sur en i -ème position, est la i -ème colonne de A : $C_i(A)$.
- $AE_i = C_i(A)$

- Le produit de A par la matrice colonne $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}$ est la matrice colonne : $\sum_{k=1}^p x_k C_k(A)$.

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} = x_1 C_1(A) + \dots + x_p C_p(A)$$

À retenir : Pour une matrice colonne X , la matrice colonne produit AX est une combinaison linéaire des colonnes de A à l'aide des coefficients de X .

Démonstration :

- L'analyse des formats est laissé à la volonté du lecteur;

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- L'analyse des formats est laissé à la volonté du lecteur;

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



B - Produit par une matrice élémentaire

Propriété 6 : Interprétation du produit matriciel en colonnes

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$

- Alors :

$$AB = A \times \left[\begin{array}{c|c|c|c} C_1(B) & C_2(B) & \dots & C_q(B) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} AC_1(B) & AC_2(B) & \dots & AC_q(B) \end{array} \right]$$

Les $AC_i(B)$ pour tout $1 \leq i \leq q$ sont des vecteurs colonnes de taille n qui forment les colonnes de AB .

- En particulier pour une matrice élémentaire $E_{t,k}^{(p,q)}$ pour tout $1 \leq t \leq p$ et $1 \leq k \leq q$ on a :

$$AE_{t,k} = A \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 0_{1,q} & 0_{1,q} & \dots & E_t & \dots & 0_{1,q} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 0_{n,1} & 0_{n,1} & \dots & C_t(A) & \dots & 0_{n,1} \end{array} \right]$$

\uparrow
k-ème colonne
 \uparrow
k-ème colonne

Multiplier une matrice A par la matrice élémentaire $E_{t,k}$ revient à placer la t -ème colonne de A en colonne k , toutes les autres colonnes étant nulles

À retenir : Produit d'une matrice par une matrice élémentaire

Le produit $AE_{i,j}$ est la matrice dont la j -ème colonne est la i -ème colonne de A et dont toutes les autres colonnes sont nulles.

Exemple :

Sans calculer le produit matriciel on a :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_3 & E_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AE_3 & AE_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_3(A) & C_1(A) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$$

À savoir faire 6 : Produit par une matrice composée de colonne élémentaire

Sans effectuer le produit matriciel, donner la matrice produit dans chacun des cas suivants :

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \dots\dots\dots$

2. $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \dots\dots\dots$

Partie IV Transposée d'une matrice

L'opération de transposition est une opération qui réalise une « symétrie d'axe $i = j$ » dans les coefficients de la matrice, c'est-à-dire un échange entre les lignes et les colonnes. Définissons plus formellement cette opération.

Définition 16 : Transposée

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice.

On appelle **transposée** de A la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, notée A^T ou tA telle que pour tout $1 \leq i \leq p$ et tout $1 \leq j \leq n$ on ait :

$$({}^tA)_{ij} = A_{ji}$$

Information : En particulier, le nombre de lignes de tA est le nombre de colonnes de A et inversement.

Exemple :

Posons $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$, on a alors que la matrice tA change de format et appartient à l'ensemble $\mathcal{M}_{4,2}(\mathbb{R})$ et on a :

$${}^tA = {}^t \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$$

À savoir faire 7 : Transposer une matrice

Transposer les matrices suivantes :

1. $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

.....

2. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

.....

3. $[1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6]$

.....

4. $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

.....

5. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 8 & 12 & 0 \end{bmatrix}$


.....

Propriété 7 : Propriétés de la transposition


Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

- **(Linéarité)** ${}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda {}^tA + \mu {}^tB$;
- **(Involutivité)** ${}^t({}^tA) = A$;

- (Transposée d'un produit) ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$

 **Erreur fréquente :** La transposition **échange** l'ordre du produit.

Démonstration :

 **Information :** ${}^t(ABC) = \dots\dots\dots$

 **À savoir faire 8 : Transposée**

Pour deux matrices compatibles A et B , simplifier l'écriture de :

${}^t(AB + BA) = \dots\dots\dots$

Partie V Exercices

A - Description d'une matrice

★☆☆☆☆ EXERCICE 1 (⌚)

Pour chaque matrice A , donner la dimension de A ainsi que les coefficients a_{13} , a_{22} et a_{32} s'ils existent.

- 1. $A = [1 \ 0 \ -53 \ 1 \ 2]$;
- 2. $A = \begin{bmatrix} -2 & 6 & -4 \\ 0 & \pi & e^{i\frac{\pi}{4}} \\ 1 & \sqrt{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$;
- 3. $A = \begin{bmatrix} 7 & -0,5 & -2 & 13 \\ \frac{1}{2} & \frac{\pi}{3} & e^1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$;

★★☆☆☆ EXERCICE 2 (⌚)

Expliciter la matrice M ainsi que sa dimension dans les cas suivants :

- 1. $M = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 4}}$ dont tous les coefficients sont nuls exceptés les coefficients suivants : $\begin{cases} m_{11} = -2 \\ m_{24} = 6 \\ m_{31} = 4 \end{cases}$
- 2. $M = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 4}}$ avec $m_{ij} = i - j + 1$.
- 3. $M = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 4}}$ avec $m_{ij} = ij$.
- 4. $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$ avec $m_{ij} = \max(i, j)$.
- 5. $M = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 4 \\ j=1}}$ avec $m_{ij} = \sum_{k=1}^i k$.
- 6. $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$ avec $m_{ij} = 2^{i-j}$.
- 7. $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ avec $m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
- 8. $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$ avec $m_{ij} = |i - j|$.
- 9. $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$ avec $m_{ij} = 3(i - 1) + j$.

B - Calcul matriciel

★★☆☆☆ EXERCICE 3 (Somme) (⌚)

Soient $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & -5 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} -9 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$. Calculer les matrices suivantes :

- 1. $C = A + B$;
- 2. $D = 2A$;
- 3. $E = A - B$;
- 4. $F = -A + 4B$.

★★☆☆☆ EXERCICE 4 (Décomposition) (⌚)

Soient $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ et $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Exprimer les matrices suivantes sous la forme $\alpha A + \beta I_3$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

- 1. $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 5 \end{bmatrix}$;
- 2. $N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

★★☆☆☆ EXERCICE 5 (⌚)

Déterminer deux matrices carrées A et B d'ordre 2 telles que $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ et $A - B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

★★☆☆☆ EXERCICE 6 (Produit) (⌚)

Calculer les produits suivants :

1. $[3 \ 2] \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix};$

4. $\begin{bmatrix} -7 & 2 & 6 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix};$

2. $[2 \ 5 \ -1] \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix};$

5. $\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix};$

6. $\begin{bmatrix} -1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ -4 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 8 & 0 \end{bmatrix}$

★★☆☆☆ EXERCICE 7 (L)

On considère les matrices $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Quels sont les produits possibles de deux de ces trois matrices? Les calculer.

★★☆☆☆ EXERCICE 8 (Condition) (L)

Considérons les matrices :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & -\alpha \\ 5 & -2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} \beta & \gamma \\ \delta & 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 9 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } E = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

1. Une addition de matrices est-elle envisageable entre deux des matrices ci-dessous? Si oui, effectuer la.
2. Est-il possible de trouver une matrice M telle que $D \times M = E$? Si oui, donner son format.
3. Est-il possible de trouver une matrice N telle que $N \times E = D$? Si oui, donner son format.
4. Est-il possible de trouver une matrice P telle que $E \times P = D$? Si oui, donner son format.
5. Pour quelles valeurs de α, β, γ et $\delta \in \mathbb{R}$ pour que $AB = C$?

★★☆☆☆ EXERCICE 9 (Bilan) (L)

Effectuer les opérations suivantes :

1. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2i \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -1 & 0 & i \\ 20 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} 1+i & 2 \\ -3i & 4 \end{bmatrix}^2$ 3. $\begin{bmatrix} 1+i & 2 \\ -3 & 4i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -i \\ 1+i & 3 \end{bmatrix}$

★★☆☆☆ EXERCICE 10 (L)

Calculer de deux façons différentes le produit matriciel :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Laquelle est la plus judicieuse?

★★★☆☆ EXERCICE 11 (Commutant) (L)

Trouver l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

C - Effet sur les lignes et les colonnes

★★★☆☆ EXERCICE 12 ⌚

On considère les matrices $S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Calculer S^2, T^2, ST et TS .

★★★☆☆ EXERCICE 13 ⌚

Trouver deux matrices d'ordre 2 non nulles qui ont un produit égal à la matrice nulle d'ordre 2.

D - Transposée

★★☆☆☆ EXERCICE 14 ⌚

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Calculer, si possible, ${}^t B^t A$ et ${}^t B X$.

★★★☆☆ EXERCICE 15 ⌚

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et :

$$M = \begin{bmatrix} a & -d & c & -b \\ d & a & -b & -c \\ -c & b & a & -d \\ b & c & d & a \end{bmatrix}$$

1. Déterminer ${}^t M$.
2. Calculer le produit matriciel ${}^t M M$.

★★★☆☆ EXERCICE 16 ⌚

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + 2A - 3I_n = 0$.
Déterminer A^3 et A^4 .

2. Soit $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$(I_4 - A)(I_4 + A + A^2 + A^3) = I_4 - A^4$$

3. Soit $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$.
 - (a) Quelle est la taille des matrices ${}^t A, {}^t A A$ et $A^t A$.
 - (b) Quels sont les coefficients sur la diagonale de $A^t A$?
 - (c) Montrer que les matrices ${}^t A A$ et $A^t A$ sont symétriques.

★★★☆☆ EXERCICE 17 (Forme quadratique) ⌚

1. Soit $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ avec $n \geq 1$ et $x_i \in \mathbb{K}$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

- (a) Quel est le format de tXX et de $X{}^tX$?
(b) Donner l'écriture indicée de chacune des deux matrices.
2. On se place maintenant dans le cas où $n = 2$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

On considère $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Démontrer l'équivalence suivante :

$$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}), q(X) = {}^tXDX \geq 0$$