NOMBRES COMPLEXES 2

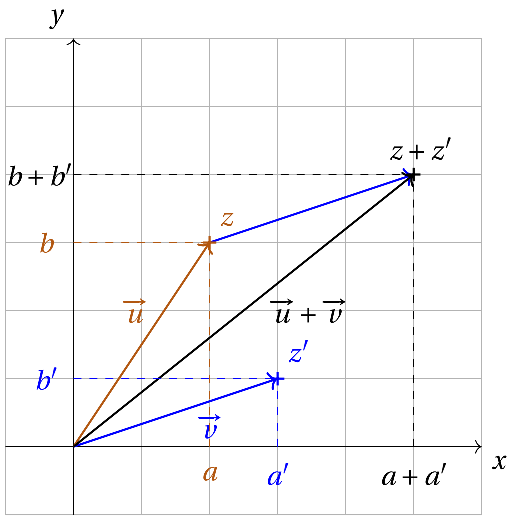
Point de vue géométrique

Plan du chapitre

Partie I Hors-programme : Construction de l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$

Nous allons tenter d'expliquer comment nous pouvons définir l'ensemble des nombres complexes, comment pouvons-nous considérer l'existence d'un fameux nombre (i) qui élevé au carré nous donnes -1.
L'idée est d'associer $\mathbb{C}$ à l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des couples de réels. Étant donné qu'un nombre complexe $z = a + ib$ est entièrement encodé par deux données, le couple (a, b). Contrairement au nombre réel qui eux sont entièrement encodé par un seul nombre.
Dans ce cas, un nombre réel x est confondu avec le complexe $(x, 0)$ et le nombre imaginaire pur iy (où $y \in \mathbb{R}$) avec le complexe $(0, y)$. Graphiquement, on comprend ici que dans un repère les nombres réels sont placés sur l'axe des abscisses et que les imaginaires purs eux sont sur l'axe des ordonnées.
On remarque ici, que là où les nombres réels vivent sur une droite ($\mathbb{R}$), les nombres complexes eux vivent dans un plan ($\mathbb{R}^2$).
Une fois cette définition donnée, définissons deux opérations :

- **La somme de deux couples de réels :** Soient $z = (a, b)$ et $z' = (a', b')$ deux éléments de $\mathbb{C}$, on définit leur somme :
$$\boldsymbol{z + z' = (a + a', b + b')}$$
de la même manière qu'on a pu définir la somme vectorielle en Seconde. En effet :



Cette opération est bien compatible avec les opérations existant sur les réels, au sens où si x et x' sont deux réels alors $x + x'$ désigne le même objet, qu'on voit x et x' comme des réels ou comme les couples $(x, 0)$ et $(x', 0)$. On aura dans tous les cas $x + x'$ et $(x + x', 0)$ (qui représente bien le réel $x + x'$).
On peut rajouter que nous avons bien la commutativité de la somme de deux couples de réels, tout simplement par la commutativité de la somme de deux vecteurs.

- **Le produit de deux couples de réels :** Soient $z = (a, b)$ et $z' = (a', b')$ deux éléments de $\mathbb{C}$, on définit leur produit :
$$\boldsymbol{z \times z' = (aa' - bb', ab' + a'b)}$$
On ne justifiera pas la formule du produit de deux couples de réels mais nous pourrons le faire plus tard, une fois que nous aurons définit la forme trigonométrique d'un nombre complexe. On peut vérifier que cette opération reste commutative et que 1 est reste bien le neutre pour cette opération, en effet :
  - $z \times z' = (aa' - bb', ab' + a'b) = (a'a - b'b, a'b + ab') = z' \times z$
  - $(1, 0) \times z = (1, 0) \times (a, b) = (1 \times a - 0 \times b, 1 \times b + a \times 0) = (a, b) = z$

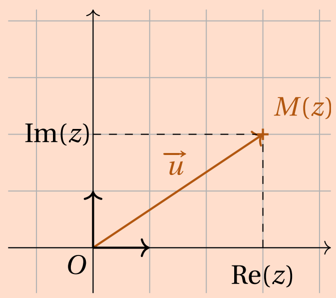
Ainsi définit, montrons que $i^2 = -1$. On vient de voir que i s'écrit alors $(0, 1)$, on a alors :
$$\begin{aligned} i^2 = (0,1) \times (0,1) &= (0 \times 0 - 1 \times 1, 0 \times 1 + 0 \times 1) \\ &= (-1, 0) \\ &= -1 \end{aligned}$$

Partie II Affixe et conjugué

A - Affixe

Définition 1 : Plan complexe et affixe

Le plan muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est appelé **plan complexe**.
Si un point M a pour coordonnées (x, y), on dit que le complexe $z = x + iy$ est l'**affixe** du point M.
On dit également que M est l'**image du complexe** $z = x + iy$, on notera généralement $M : M(z)$.
De même, si $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ est un vecteur du plan, on dit que le complexe $z = x + iy$ est l'affixe de $\overrightarrow{u}$.



Information :

- Les réels sont donc les complexes dont l'image est située sur l'axe des abscisses;
- Les imaginaires purs sont les complexes dont l'image est située sur l'axe des ordonnées.
- Pour M un point d'affixe z, on a alors que le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour affixe z.

Propriété 1 : Somme - Multiplication par un scalaire

Soient $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ deux vecteurs du plan complexe d'affixe respective z_1 et z_2.

- Le vecteur somme $\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$ a pour affixe $z_1 + z_2$;
- Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, le vecteur $\lambda\overrightarrow{u_1}$ a pour affixe λz_1.

Exemple :

Soient $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ deux vecteurs d'affixes respectives $z_1 = 5 + i$ et $z_2 = 3i + 1$. Ainsi le vecteur $\dfrac{\overrightarrow{u_1} - 3\overrightarrow{u_2}}{2}$ a pour affixe :

$$\begin{aligned} \frac{z_1 - 3z_2}{2} &= \frac{5 + i - 9i - 3}{2} \\ &= \frac{-4i - 2}{2} \\ &= -2i - 1 \end{aligned}$$

Démonstration :

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

■

Propriété 2 : Différence

Soient A et B deux points du plan complexe d'affixe respective z_A et z_B.

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$;
- Le point I, d'affixe z_I, est le milieu de $[AB]$ si, et seulement si, $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$

Démonstration **:**

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

■

À savoir faire 1 : Manipuler les affixes

Soient A, B et C trois points du plan complexe d'affixe respective : $z_A = 5i$, $z_B = -2 + i$ et $z_C = 5 + 4i$

1. Déterminer l'affixe du point D, pour lequel $ABDC$ est un parallélogramme.

....

....

....

....

2. Déterminer l'affixe du point M centre du parallélogramme $ABDC$

....

....

....

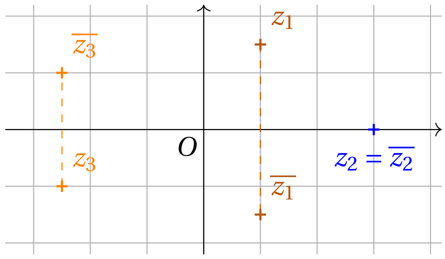
....

B - Conjugué

Propriété 3 : Conjugué

Géométriquement, l'image de $\overline{z}$, le conjugué d'un nombre complexe z, est le symétrique du point d'affixe z par rapport à l'axe des abscisses.

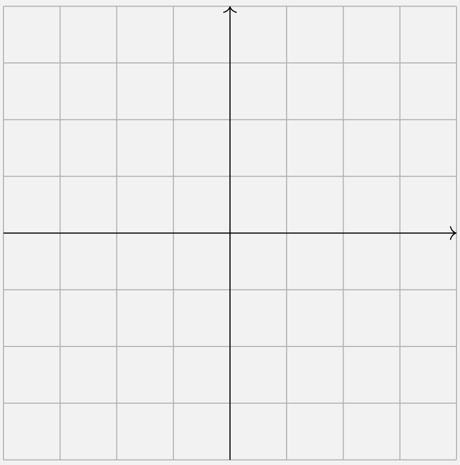
Exemple :



À savoir faire 2 : Représenter un nombres complexes et son conjugué.

Représenter dans le plan complexe ci-dessous, chacun des nombres complexes et son conjugué suivants :

- $z_1 = 2 - 3i$
- $z_2 = -i$
- $z_3 = -3$



Partie III Module

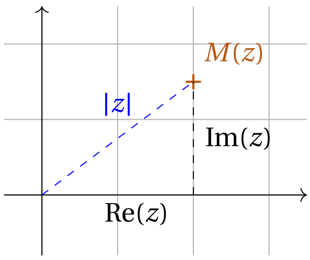
Définition 2 : Module

Pour $z = x + iy$ un nombre complexe, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;
On appelle **module** de z, le réel positif défini par :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z)^2}$$

À retenir : Géométriquement

Le module de z est la longueur du segment entre l'origine O et le point d'affixe z.



On voit clairement apparaître le **théorème de Pythagore**, c'est pourquoi il est très simple de retrouver la formule du module d'un nombre complexe.
De même on retiendra que le module d'un nombre complexe est toujours positif.

Exemple :

Le module du nombre complexe : $z = 3 - 4i$ est

$$|3-4i| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

Propriété 4 :

Si A et B sont deux points du plan complexe, d'affixe respective z_A et z_B alors la distance $AB = |z_B - z_A|$.

***Démonstration* :**

....

....

....

....

....

....

■

Information : Notation

Dans le cas où $z \in \mathbb{R}$, on a le module de z qui est égal à $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2} = \sqrt{z^2}$ qui est la valeur absolue de z.
Ce qui justifie la même notation entre module et valeur absolue, le module prolonge dans le cas complexe la notion de valeur absolue.

Propriété 5 :

Pour $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$z\overline{z} = |z|^2$$

***Démonstration* :**

....

....

■

Corollaire 1 : Formule de l'inverse

Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on a :

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

Démonstration :

....

.... ■

Propriété 6 :

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes, on a :

- $|z_1| = |\overline{z_1}| = |-z_1|$
- $|z_1| = 0 \Leftrightarrow z_1 = 0$
- $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
- Si $z_2 \neq 0$ alors $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$
- Pour $n \in \mathbb{Z}$, on a : $|z^n| = |z|^n$

Exemple :

- $\left|\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}\right)^{2025}\right| =$ ....
- $\left|\dfrac{3-i}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}\right| =$ ....

Démonstration :

- ....

  ....

  ....
- ....

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....
- ....

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....
- ....

  ....

....
....
....
....

- ....
....
....
....
....
....

■

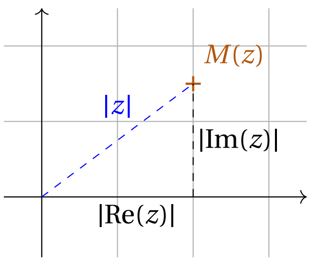
Propriété 7 :

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

1. $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ et on a l'équivalence :
$$|\mathrm{Re}(z)| = |z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$
2. $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$ et on a l'équivalence :
$$|\mathrm{Im}(z)| = |z| \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$$

***Démonstration* :**

Les deux inégalités sont évidentes car nous travaillons dans un triangle rectangle de côtés de longueur : $|\mathrm{Re}(z)|$ et $|\mathrm{Im}(z)|$ et d'hypoténuse de longueur $|z|$.



Démontrons maintenant le cas d'égalité :

....
....
....
....
....
....

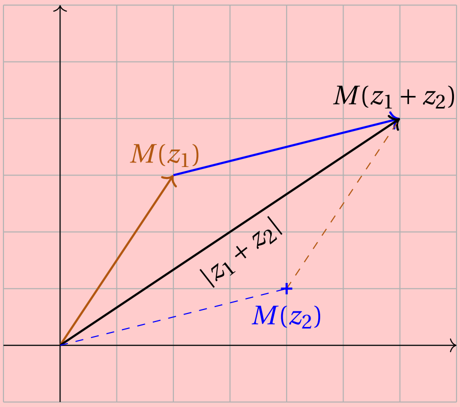
■

Propriété 8 : Inégalité triangulaire

Si z_1, z_2 sont deux nombres complexes, alors :
$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Cette inégalité devient égalité si, et seulement si, $z_1 = 0$ ou s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $z_2 = \lambda z_1$

Graphiquement la situation se représente ainsi :



À retenir : Faire un détour c'est toujours plus long
L'inégalité triangulaire formalise l'idée que généralement, le chemin le plus court est la ligne droite.

***Démonstration* :**

Partie IV Forme trigonométrique et forme exponentielle

A - Nombres complexes de module 1

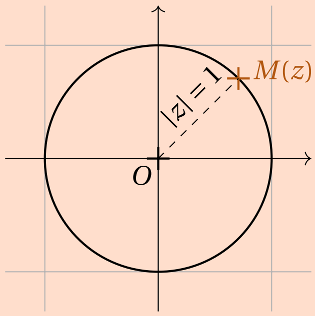
Définition 3 : Cercle unité

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$$

L'ensemble des points du plan complexe ayant un module égal à 1, est l'ensemble des points du plan distant d'une longueur 1 du point $(0,0)$.
D'où $\mathbb{U}$ est l'ensemble des affixes des points du cercle unité, en d'autres termes :

$$z \in \mathbb{U} \Leftrightarrow M(z) \in \mathscr{C}(O,1)$$



Propriété 9 : Structure de $\mathbb{U}$

- Le **produit** de deux éléments de $\mathbb{U}$ est un élément de $\mathbb{U}$.
- L'**inverse** de tout élément de $\mathbb{U}$ est un élément de $\mathbb{U}$.

Démonstration :

Cette propriété repose sur la multiplicativité du module :

1. ....
....
....
....
....
....
2. dotlines6

■

À savoir faire 3 : Manipuler les modules

1. (a) A-t-on $1 + i \in \mathbb{U}$?

....
....

(b) Et pour $\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$?

....

....

2. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus 1$,
   Montrer que $\dfrac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R}$ si, et seulement si, $z \in \mathbb{U}$

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

Propriété 10 : Condition nécéssaire et suffisante

Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on a :

$$z \in \mathbb{U} \Leftrightarrow \frac{1}{z} = \overline{z}$$

Démonstration :

....

....

....

■

Exemple :

En particulier qui est l'inverse de i ? ....

Propriété 11 : Forme trigonométrique - Argument

Si $z \in \mathbb{U}$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = \cos\theta + i\sin\theta$. Un tel réel θ est appelé un **argument** de z.
On appellera **forme trigonométrique** d'un nombre complexe z, la forme :

$$z = \cos\theta + i\sin\theta$$

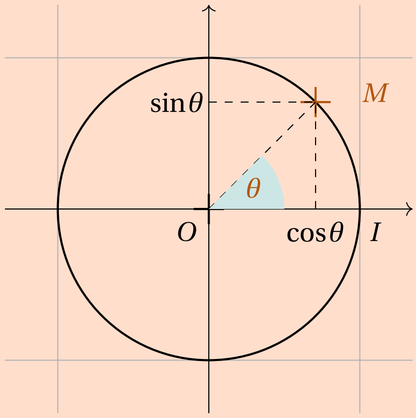
Démonstration :

Soit $z \in \mathbb{U}$, on a $|z|^2 = 1$ i.e $\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 = 1$, donc on peut affirmer que le point $M(z)(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)) \in \mathscr{C}(O, 1)$.
$M(z)$ est donc un point du cercle unité, or on rappelle la définition du cosinus et du sinus :

Définition 4 : Cosinus - Sinus

Soit M un point du cercle unité, notons θ l'angle en radian de l'angle $\widehat{IOM}$

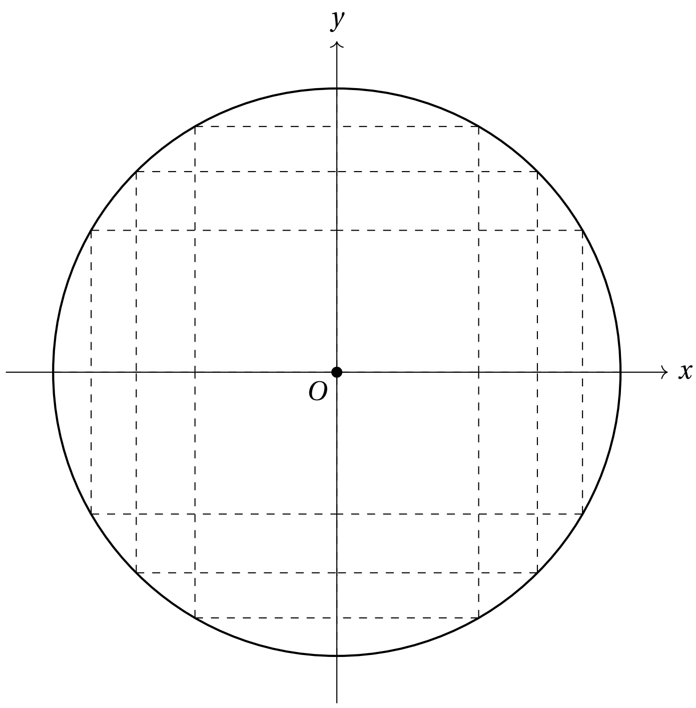
- L'abscisse du point M est le cosinus de l'angle θ : $\cos\theta$;
- L'ordonné du point M est le sinus de l'angle θ : $\sin\theta$;



Ainsi comme $M(z)$ est un point du cercle unité, on sait que les coordonnées de $M(z)$ sont $(\cos\theta, \sin\theta)$ où θ est une mesure en radian de l'angle $\widehat{IOM}$. Par unicité des coordonnées du point $M(z)$ on a $\text{Re}(z) = \cos\theta$ et $\text{Im}(z) = \sin\theta$.
D'où $z = \cos\theta + i\sin\theta$. ■

Information : Terminologie
Si $\theta \in \mathbb{R}$ est tel que : $z = \cos\theta + i\sin\theta$ on a alors également : $z = \cos(\theta+2\pi)+i\sin(\theta+2\pi)$. Et même plus généralement on sait que : pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a $z = \cos(\theta+2k\pi)+i\sin(\theta+2k\pi)$.
Il est donc claire qu'il existe une infinité de réel θ, vérifiant la dernière propriété, ainsi on veillera bien à dire **un** argument et pas l'argument.

À retenir : Cercle trigonométrique



À savoir faire 4 : Forme trigonométrique d'un nombre complexe.

Déterminer un argument et une forme trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

   ....

   ....

2. $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$

   ....

   ....

3. $z_3 = -\frac{i}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

   ....

   ....

4. $z_4 = -i$

   ....

   ....

B - Argument

Définition 5 : Argument

Pour M un point du plan complexe d'affixe $z \neq 0$, un **argument** de z, que l'on notera $\arg(z)$, est une mesure de l'angle orienté $\widehat{IOM}$.
Le réel θ est une mesure, en radian, de l'angle orienté $\widehat{IOM}$, on note alors :

$$\widehat{IOM} = \theta + k \times 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Ici on a alors $\arg(z) = \theta + 2k\pi$

Information : Pour $z = 0$, l'angle $\widehat{IOM}$, n'est pas défini car les points O et M sont confondus. On ne peut donc pas parler d'argument pour le complexe 0.

À savoir faire 5 : Déterminer un argument d'un nombre complexe

Déterminer un argument pour chacun des nombres complexes suivants :

1. $z = -i$

2. $z = -2$

3. $z = 1 + i$

4. $z - 1 + i\sqrt{3}$

   Indice : On pourra penser à la trigonométrie dans un triangle rectangle.

....

....

....

....

....

....

....

....

À retenir : L'angle orienté d'un point avec l'axe des abscisses n'est pas unique, il est exprimé à 2π près. À partir d'un point si un ajoute un (ou des) tour(s) complet, dans un sens ou dans l'autre, on retombe sur le même point. C'est pourquoi on va définir une notion qui nous permettra de savoir si deux mesure d'angle en radian définisse un même point du cercle trigonométrique.

Propriété 12 : Congruence

Deux mesures, en radians, d'un même angle diffèrent d'un multiple entier de 2π. Si θ_1 et θ_2 sont deux mesures d'un même angle alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta_1 - \theta_2 = 2k\pi$, dans ce cas on dira que θ_1 et θ_2 sont congrus modulo 2π et on notera $\theta_1 \equiv \theta_2 [2\pi]$

Démonstration :

Considérons M un point du plan complexe d'affixe z et deux mesures θ_1 et θ_2 de cet angle $\widehat{IOM}$. On a alors qu'il existe $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$\widehat{IOM} = \theta_1 + 2k_1\pi \quad \wedge \quad \widehat{IOM} = \theta_2 + 2k_2\pi$$

Ainsi :

$$\theta_1 + 2k_1\pi = \theta_2 + 2k_2\pi$$

On a alors :

- θ_1 et θ diffèrent d'un multiple entier de 2π en effet :

$$\theta_1 = \theta_2 + 2(k_2 - k_1)\pi$$

- $\theta_1 - \theta_2 = 2(k_2 - k_1)\pi = 2K\pi$ avec $K = k_2 - k_1 \in \mathbb{Z}$.

■

À savoir faire 6 : Congrus modulo 2π ?

Déterminer si les nombres suivants sont congrus modulo 2π ?

1. $\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{13\pi}{6}$?

   ....

2. $\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{5\pi}{4}$?

   ....

3. $-\dfrac{3\pi}{4}$ et $\dfrac{\pi}{4}$?

   ....

4. $-\dfrac{17\pi}{6}$ et $-\dfrac{5\pi}{6}$?

....

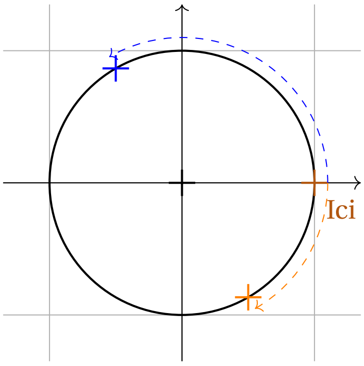
5. $\dfrac{3\pi}{4}$ et $-\dfrac{21\pi}{4}$?

....

Définition 6 : Argument principal

L'**argument principal** d'un nombre complexe z non nul, est la mesure, en radian, de l'angle orienté $\widehat{IOM}$ (en gardant les mêmes notations que précédemment) appartenant à $]-\pi, \pi]$.

À retenir : Pourquoi l'intervalle $]-\pi, \pi]$?
L'idée c'est de partir de la partie droite de l'axe des abscisses sur le cercle trigonométrique :



et de réaliser le chemin le plus court vers le point souhaité.

Information :

- Ici nous pouvons dire l'argument principal, car il est unique.
- Pour cette raison, on essayera le plus souvent possible de travailler avec l'argument principal d'un nombre complexe.

À savoir faire 7 : Argument principal

Déterminer l'argument principal de chacun des nombres complexes suivants ?

1. $\arg(z) = \dfrac{11\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$?

....

2. $\arg(z) = 2\pi + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$?

....

3. $\arg(z) = -\dfrac{25\pi}{5} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$?

....

4. $\arg(z) = -\pi + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$?

....

5. $\arg(z) = \dfrac{17\pi}{3} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$?

....

C - Passage d'un complexe unitaire à un complexe quelconque

Propriété 13 :

Soit $z \in \mathbb{C}^*$, on a $\dfrac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$. On appellera le complexe $\dfrac{z}{|z|}$, lorsqu'il est défini, le **normalisé** de z.

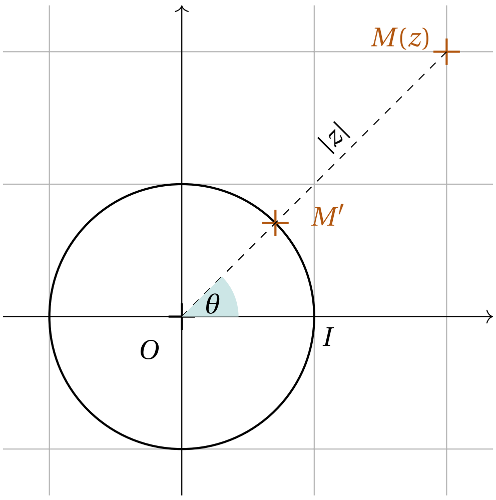
Démonstration :

....

....

■

À retenir : La propriété précédente nous fait le pont entre les nombres complexes, non nuls, et les nombres complexes de module 1. On va chercher à savoir quelles propriétés sont invariantes par multiplication par un scalaire strictement positif (module ou inverse d'un module). Ceci nous permettra d'affirmer que les propriétés qui sont vraies pour les nombres complexes de module 1, sont aussi vraies au module près pour les nombres complexes non nuls.
À partir d'un nombre complexe non nul on peut toujours se ramener un nombre complexe de module 1.
Si on appelle $M(z)$ le point du plan complexe d'affixe z non nul, on peut considérer le point M' le point de la demi-droite $[OM)$ appartenant au cercle trigonométrique.



Propriété 14 :

Soient z un nombre complexe non nul, d'argument principal θ, et λ un nombre réel non nul. On a alors :

- Si $\lambda > 0$ alors $\arg(\lambda z) = \theta + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

$$\arg(\lambda z) \equiv \arg(z) [2\pi]$$

- Si $\lambda < 0$ alors $\arg(\lambda z) = \theta + \pi + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

$$\arg(\lambda z) \equiv \arg(z) + \pi [2\pi]$$

Démonstration :

Considérons M un point du plan complexe d'affixe $z \in \mathbb{C}^*$, notons θ son argument principal on a alors :

$$\widehat{IOM} = \theta$$

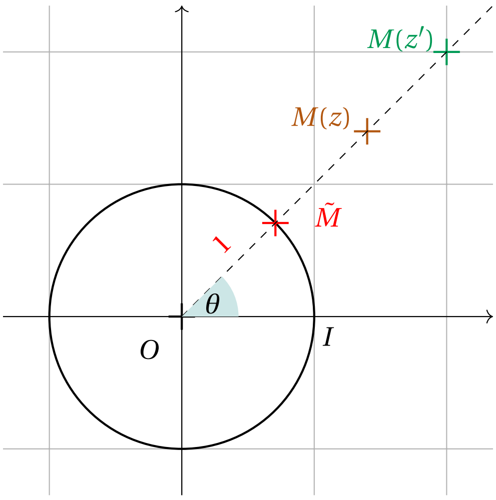
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, notons M' le point d'affixe λz.
Multiplier l'affixe du point M par λ revient à multiplier les coordonnées de M par λ

- Si $\lambda > 0$: multiplier le complexe z par $\lambda > 0$ revient à multiplier les coordonnées de M par λ, cela correspond donc à **homothétie de rapport positif** et de centre O.
  On sait alors que O, M et M' sont alignés et $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont deux vecteurs de même direction et surtout même sens. Ainsi :
  $$\arg(\lambda z) \equiv \arg(z)\,[2\pi]$$
- Si $\lambda < 0$: multiplier le complexe z par $\lambda < 0$ revient à multiplier les coordonnées de M par λ, cela correspond donc à **homothétie de rapport négatif** et de centre O.
  On sait alors que M', O et M et sont alignés (dans cet ordre) et $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont deux vecteurs de même direction mais de sens contraire. Ainsi :
  $$\arg(\lambda z) \equiv \arg(z) + \pi\,[2\pi]$$

■

À retenir : Si on multiplie un complexe non nul par un réel strictement positif l'argument principal ne change pas, ce qui n'est pas le cas pour un réel strictement négatif : le complexe produit fait un demi tour, c'est une rotation d'angle π rad.

Pour $z \in \mathbb{C}^*$, la propriété précédente nous permet d'affirmer que pour tout point M, d'affixe z', situé sur la demi droite $[OM)$ les complexes z et z' ont même argument principal.



Et en particulier pour le complexe normalisé on a :

Propriété 15 : Argument d'un complexe et son normalisé

Pour $z \in \mathbb{C}^*$, considérons les arguments principaux de z et son normalisé $\dfrac{z}{|z|}$ on a alors :

$$\arg(z) = \arg\left(\frac{z}{|z|}\right)$$

Démonstration :

Cas particulier de la propriété précédente car pour $\lambda = \dfrac{1}{\lambda} > 0$ on a que :

$$\lambda z \equiv z[2\pi]$$

Donc en particulier les arguments principaux de z et λz sont égaux. ■

D - Forme trigonométrique

Propriété 16 : Forme trigonométrique

Soit z un nombre complexe non nul, d'argument principal θ, on a :

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Démonstration :

....

....

....

....

....

....

....

....

....

■

Méthode 1 : Obtenir la forme trigonométrique d'un nombre complexe

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul.
Tout d'abord on fait remarquer que la forme trigonométrique d'un nombre complexe est entièrement défini par deux valeur : le **module**, $|z|$, et l'**argument principal**, $\arg z$ de notre nombre complexe

1. On factorise par le module de $|z|$, on a alors :

$$z = |z|\left(\frac{x}{|z|} + i\frac{y}{|z|}\right)$$

   Le complexe $\frac{x}{|z|} + i\frac{y}{|z|}$ est donc un nombre complexe de module 1, qui a donc le même argument principal que z
2. On identifie alors l'argument principal de notre nombre complexe de la façon suivante :

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{|z|} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{|z|} \end{cases}$$

À savoir faire 8 : Déterminer la forme trigonométrique d'un nombre complexe

Déterminer la forme trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants :

1. $z = 1 - i$

....

....

....

....

2. $z=\sqrt{3}+i$

....

....

....

....

3. $z=-2i$

....

....

....

....

Propriété 17 : Caractérisation d'un réel ou d'un imaginaire pur

Soit $z \in \mathbb{C}^*$, notons $\arg(z)$ l'argument principal de z. On a alors :

- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg(z) = 0$ ou π ;
- $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \arg(z) = \dfrac{\pi}{2}$ ou $-\dfrac{\pi}{2}$

***Démonstration* :**

....

....

....

....

....

....

■

E - Forme exponentielle

Définition 7 : Exponentielle imaginaire

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on définit l'**exponentielle imaginaire** et on note $e^{i\theta}$ le nombre complexe défini par :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Exemple :

On a alors :

- $e^{i0} =$ ....
- $e^{i\frac{\pi}{2}} =$ ....
- $e^{i\pi} =$ ....
- $e^{i\frac{3\pi}{2}} =$ ....

⚠ **Attention : Exponentielle réelle VS exponentielle imaginaire**

Pour nous cette année, la forme exponentielle restera une simple notation, rien ne nous permet d'affirmer qu'il y a un quelconque rapport avec la fonction exponentielle que vous connaissez dans le cas réel. On fera donc attention aux abus de propriétés, une propriété que vous connaissez sur l'exponentielle réelle restera pour l'exponentielle réelle !
On constatera que l'exponentielle imaginaire $e^{i\theta}$ partage des propriétés en commun avec l'exponentielle réelle, mais on fera attention d'utiliser uniquement celle cité dans ce cours.

Propriété 18 :

Soient $\theta, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, on a alors :

- $\left|e^{i\theta}\right| = 1$ et $\arg\left(e^{i\theta}\right) = \theta + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$;
- Pour $k \in \mathbb{Z}$, on a $e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$
- $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
- $e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
- $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
- $\dfrac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

***Démonstration* :**

- ....
....
....
....
....
....
- ....
....
....
....
....
- ....
....
....
....
....

■

- **Attention**, on ne manipule pas l'exponentielle réelle donc on ne peut pas utiliser les propriétés de l'exponentielle réelle.
Ici on va supposer connu les formules d'additions du cosinus et du sinus que l'on démontrera (de manière indépendante) plus tard dans ce polycopié :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

....
....

....
....
....

- ....
....
....
....
....
....
....

- ....
....
....
....
....

■

Propriété 19 : Forme exponentielle

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ tel que :

$$z = re^{i\theta}$$

On a alors $r = |z|$, et si $z \neq 0$, alors θ est un argument de z.
Cette écriture est appelé **forme exponentielle** de z.

Démonstration :

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

■

À savoir faire 9 : Forme exponentielle d'un nombre complexe.

Compléter le tableau suivant :

Forme algébrique	Forme trigonométrique	Forme exponentielle
		$e^{i\frac{\pi}{3}}$
	$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$	
$-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$		
$-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$		
$-3i-3\sqrt{3}$		

Propriété 20 : Opérations sur les arguments

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls. On a alors :

- $\arg\left(\overline{z_1}\right)\equiv-\arg(z_1)\,[2\pi]$;
- $\arg(z_1z_2)\equiv\arg(z_1)+\arg(z_2)\,[2\pi]$;
- $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)\equiv\arg(z_1)-\arg(z_2)\,[2\pi]$
- Pour $n\in\mathbb{Z}$, on a : $\arg\left(z_1^n\right)\equiv n\arg(z_1)\,[2\pi]$

Démonstration :

- ....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
- ....
....
....

....
....
....
....
....
....
....
....
....

- ....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

- ....
....
....
....
....

■

Méthode 2 : Factorisation par l'angle moitié

Pour mettre sous forme exponentielle la somme de deux nombres complexes de même module, on factorise par ce qu'on appelle l'**angle moitié**. Par exemple :

$$\begin{aligned} re^{i\theta_1} + re^{i\theta_2} &= re^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\left(e^{i\frac{\theta_1-\theta_2}{2}} + e^{i\frac{\theta_2-\theta_1}{2}}\right) \\ &= re^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\left(e^{i\frac{\theta_1-\theta_2}{2}} + \overline{e^{i\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}}\right) \\ &= 2r\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}} \end{aligned}$$

⚠ **Attention :** $\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)$ n'est pas forcément positif, ainsi par cette méthode nous n'obtenons automatiquement la forme exponentielle. Dans le cas où le cosinus est négatif il ne faudra pas oublier la formule : $-\cos x = \cos(\pi - x)$

À savoir faire 10 : Utiliser la factorisation par l'angle moitié.

Soit $a, b \in]0, \pi[$, écrire sous forme exponentielle et préciser le module de chacun des complexes suivants.

1. $z_1 = 1 + e^{ia}$

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

2. $z_2 = 1 - e^{ia}$

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

3. $z_3 = e^{ib} + e^{ib}$

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

4. $z_4 = \dfrac{1+e^{ia}}{1+e^{ib}}$

   ....
   ....
   ....
   ....

....

....

....

....

F - Applications aux fonctions trigonométriques

Propriété 21 : Formules d'Euler

Pour tout réel $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Démonstration :

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

■

Définition 8 : Linéariser une expression trigonométrique

On appelle **linéariser** une expression trigonométrique le fait de transformer une expression contenant des puissances ou des produits de fonctions trigonométriques (comme $\sin^k x, \cos^k x, \cos x \sin x$...) en une somme de termes où les arguments des fonctions trigonométriques sont linéaires, c'est-à-dire sous la forme $ax + b$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

Exemple :

Soit $x \in \mathbb{R}$, linéarisons l'expression $\cos^3 x$, c'est-à-dire exprimons notre expression en fonction d'une somme de cosinus de la forme : $\cos(nx)$ où $n \in \mathbb{N}$.

....

....

....

....

....

....

À savoir faire 11 : Linéariser une expression trigonométrique

Linéariser les expressions suivantes :

1. $\sin^3 x$

....

....

....

....

....

....

2. $(\cos x + \sin x)^2$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3. $\sin x \sin(2x)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Propriété 22 : Formules d'addition

Soient a et b deux réels. On a alors :

- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

Démonstration :

Il pourrait paraître évident d'utiliser les formules d'Euler pour démontrer ces formules, malheureusement en utilisant les formules d'Euler nous utiliserons les propriétés du produit d'exponentielle complexe qui ont été démontré justement à l'aide des formules d'addition. Ainsi pour éviter un raisonnement circulaire il faut démontrer les formules d'addition sans passer par les formules d'Euler.

....

....

....

....

....

....

■

Information : D'autres formules ?

Donner alors une formule pour :

- $\cos(a-b) =$ ....
- $\sin(a-b) =$ ....

À retenir : Moyen mnémotechnique

Pour retenir ces formuules on pourra se dire que le **co**sinus est un **co**nnard il ne se mélange pas et change d'humeur (signe) et le **si**nus est **sy**mpa il se mélange et ne change pas d'humeur (signe).

À savoir faire 12 : Utiliser les formules d'addition

1. Calculer $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$.

....

....

....

2. Exprimer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ en fonction de : $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right), \cos\left(\frac{\pi}{4}\right), \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

....

....

....

....

....

....

3. En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

. . . .

. . . .

. . . .

Propriété 23 : Formule de Moivre

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Démonstration :

. . . .

. . . .

. . . .

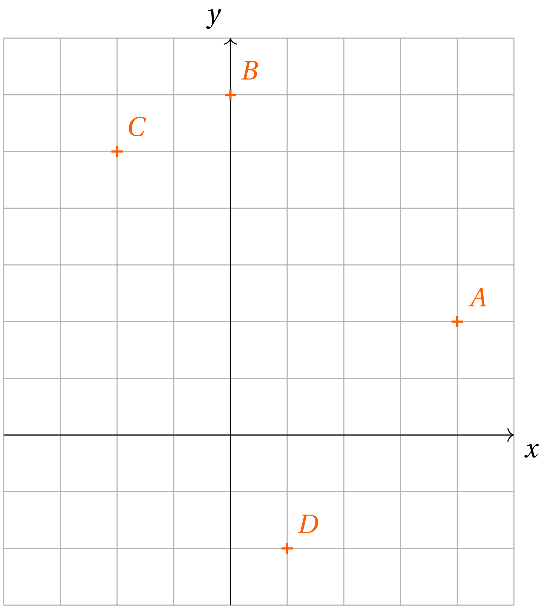
■

Partie V Exercices

A - Manipuler les affixes

★⯪☆☆☆ **EXERCICE 1** (Affixes) ....

On considère le plan complexe suivant :



1. Donner les affixes des points :

   (a) A ; (b) B ; (c) C ; (d) D.

2. Donner les affixes des vecteurs :

   (a) $\overrightarrow{AB}$; (b) $\overrightarrow{BC}$.

3. Placer les points :

   (a) E d'affixe $2+3i$; (b) F d'affixe $-1-i$.

4. Montrer, en utilisant le calcul, que les points A, E et C sont alignés.

B - Module

★★⯪☆☆ **EXERCICE 2** (Calculs) ....

Soit $t \in \mathbb{R}$. Calculer le module de chacun des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 5i$
2. $z_2 = -3i$
3. $z_3 = 3-2i$
4. $z_4 = (2+i)(i-t)$
5. $z_5 = -2i(\sin t - it)$
6. $z_6 = \dfrac{2-i}{3-i}$
7. $z_7 = \dfrac{2+i}{1+2i}$
8. $z_8 = \dfrac{3i\left(1+it^2\right)}{e^t - i}$
9. $z_9 = (1+i)^5$
10. $z_{10} = \dfrac{e^{-it}}{1+3i}$
11. $z_{11} = \dfrac{1+e^{it}}{e^{it}-e^{2it}}$

★★☆☆☆ **EXERCICE 3** (Triangle équilatéral) ....

On considère trois points du plan complexe A d'affixe 1, B d'affixe $-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et C d'affixe $-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Placer le plus précisément possible les trois points.
2. Montrer par le calcul que ABC est un triangle équilatéral.

★★★⯪☆ **EXERCICE 4** (Même module) ....

Soient z et z' deux complexes non nuls et de même module, montrer que $U = \dfrac{(z+z')^2}{zz'}$ est un nombre réel positif.

★★★⯪☆ **EXERCICE 5** () ....

Soient $u \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$ et $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\frac{z-u\bar{z}}{1-u} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |u| = 1$$

★★★★☆ **EXERCICE 6** (Condition d'appartenance à un cercle) ....

Soient A et B deux points distincts du plan, d'affixes respectives a et b.
Montrer qu'un point M d'affixe z appartient au cercle Γ de diamètre $[AB]$ si, et seulement si :

$$2z\overline{z}-\left(\overline{a}+\overline{b}\right)z+(a+b)\overline{z}+a\overline{b}+\overline{a}b=0$$

★★★★☆ **EXERCICE 7** (Suite) ....

Soit $(z_n)_n$ une suite de nombre complexes et $l\in\mathbb{C}$. On dit que z_n tend vers l lorsque n tend vers $+\infty$ si $\lim\limits_{n\to+\infty}|z_n-l|=0$.
On admet que si z_n tend vers une limite l alors elle est unique.

1. Pour tout entier naturel n, on pose $z_n=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{2i}{3}\right)^n$. Calculer $\left|\dfrac{1}{2}-\dfrac{2i}{3}\right|$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n$.
2. On considère la suite $(a_n)_n$ définie par $a_0=i$, et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_{n+1}=\dfrac{1+i}{2}a_n+1-i$.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel n, $|a_{n+1}-2|=\dfrac{|a_n-2|}{\sqrt{2}}$.
   (b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

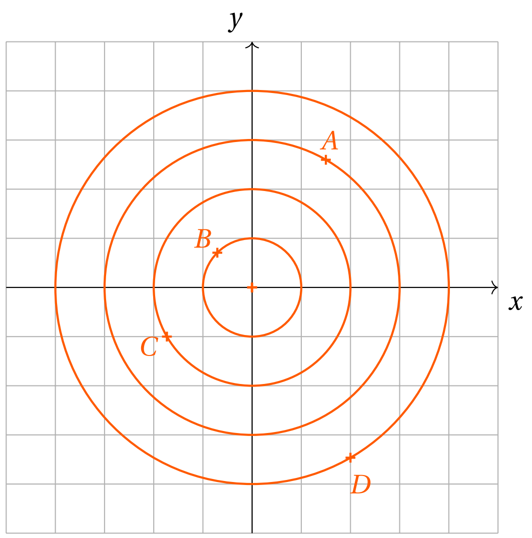
★★★★☆ **EXERCICE 8** (Disques) ....

1. Soient $a=-2+i$ et z_1,z_2 deux nombres complexes qui vérifient $|z_1-a|\leq 2$ et $|z_2-a|\leq 3$.
   Montrer que $|z_1-z_2|\leq 5$. (*On pourra commencer par faire un dessin de la situation.*)
2. Soient $a=-2+i$, $b=-2+2i$ et z_1,z_2 deux nombres complexes qui vérifient $|z_1-a|\leq 2$ et $|z_2-b|\leq 3$.
   Montrer que $|z_1-z_2|\leq 6$. (*On pourra commencer par faire un dessin de la situation.*)

C - Forme trigonométrique

★★☆☆☆ **EXERCICE 9** (Modules et arguments) ....

On considère le plan complexe suivant :



1. Donner le module et des arguments des points :
   (a) A ; (b) B ; (c) C ; (d) D.
2. Placer les points suivants :
   (a) E d'affixe z tel que $|z|=3$ et $\arg z\equiv\dfrac{5\pi}{4}[2\pi]$;
   (b) F d'affixe $2\sqrt{2}-2i$.
3. Représenter sur cette figure, l'ensemble des points d'affixe z tels que $\arg z\equiv\dfrac{\pi}{6}[2\pi]$.

★★☆☆☆ **EXERCICE 10** (Module et argument) ....

Déterminer la forme trigonométrique du nombre complexe $z=\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

★★★★☆ **EXERCICE 11** (Calculs dans $\mathbb{U}$)

Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$ tels que $z_1 z_2 \neq -1$. On pose $Z = \dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$.

1. Montrer que Z est réel.
2. On note θ_1, θ_2 des arguments des complexes z_1 et z_2 respectivement. Que peut-on dire que $\theta_1 + \theta_2$? Exprimer le nombre réel Z en fonction de θ_1 et θ_2 (*sans exponentielle complexe*).

D - Forme exponentielle

★★★⯪☆ **EXERCICE 12** (Au boulot)

Mettre les complexes suivants sous forme exponentielle :

1. $z_1 = i$
2. $z_2 = -3$
3. $z_3 = -\sqrt{3} + i$
4. $z_4 = -5e^{\frac{3i\pi}{4}}$

★★★⯪☆ **EXERCICE 13** (Angle moitié)

Mettre les complexes suivants sous forme exponentielle :

1. $z_1 = e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{-\frac{i\pi}{5}}$
2. $z_2 = 1 + e^{i\frac{\pi}{6}}$
3. $z_3 = 1 - e^{i\frac{\pi}{4}}$
4. $z_4 = 1 + e^{i\frac{7\pi}{6}}$

★★☆☆☆ **EXERCICE 14** (Placer)

Pour les valeurs de $z \in \mathbb{C}$ suivantes, placer (approximativement) dans le plan complexe les nombres z^n, où $n \in \mathbb{N}$.

1. $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$
2. $z = \dfrac{5e^{i\frac{\pi}{3}}}{4}$
3. $z = \dfrac{4e^{i\frac{\pi}{3}}}{5}$

★★★★☆ **EXERCICE 15** (Réels ?)

Déterminer les entiers n tels que $\left(\sqrt{6} + i\sqrt{2}\right)^n$ soit réel.

E - Applications aux fonctions trigonométrique

★★★★☆ **EXERCICE 16** (Lien entre forme algébrique et forme exponentielle)

On définit les complexes ci-après :

$$j = e^{i\frac{2\pi}{3}}, \quad z_0 = 1 + i, \quad z_1 = z_0 j, \quad z_2 = z_0 j^2$$

1. Donner l'écriture exponentielle de z_0, z_1 et z_2.
2. Donner l'écriture algébrique de j puis celle de z_1.
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$.
4. On pose $\omega = -2 + 2i$;
   (a) Écrire ω sous forme exponentielle ;
   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^3 = \omega$. On recherchera les solutions sous forme exponentielle puis on reconnaîtra z_0, z_1 et z_2.

★★★⯪☆ **EXERCICE 17** (Sinus) ....

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, pour tout réel x,

$$|\sin(nx)| \leq n|\sin x|$$

★★★☆☆ **EXERCICE 18** ($\frac{\pi}{12}$) ....

Écrire $z = \dfrac{1+i}{1+i\sqrt{3}}$ sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.
En déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

★★★☆☆ **EXERCICE 19** (Tangente) ....

Soient a et b deux réels tels que $\tan a$, $\tan b$ et $\tan(a+b)$ sont bien définis.

1. Rappeler les formules donnant $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$.
2. En déduire une expression de $\tan(a+b)$ en fonction de $\tan a$ et $\tan b$.
   Puis une expression de $\tan(2a)$ en fonction de $\tan a$.
3. **Application : calcul de $\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$**
   (a) Montrer que le nombre $x = \tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ est solution de l'équation :
   $$x^2 + 2x - 1 = 0$$
   (b) En déduire que $\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1$.
   (c) Déterminer avec la même méthode $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

★★☆☆☆ **EXERCICE 20** (Angle moitié) ....

Soient $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \not\equiv 0[2\pi]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer et simplifier au maximum $D_n(x) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$;
2. Calculer et simplifier au maximum $F_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x)$.

★★★★☆ **EXERCICE 21** (Linéarisation) ....

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Linéariser les expressions suivantes :

1. $\sin^2(2\theta)$
2. $\sin(2\theta)\cos\theta$
3. $\sin^3\theta$
4. $\cos(n\theta)\cos\theta$
5. $\cos^2((n+1)\theta)$
6. $\sin((n+1)\theta)\sin((n-1)\theta)$

★★★★⯪ **EXERCICE 22** (Intégration) ....

1. Linéariser $\sin^5 x$. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^5 x \, dx$;
2. Linéariser $\cos^2(2x)\sin^3(3x)$.