NOMBRES COMPLEXES 1

Point de vue algébrique

Plan du chapitre

Introduction

Les nombres complexes ont été inventés pour étendre l'ensemble des nombres réels et permettre de résoudre les équations polynomiales n'ayant pas de solution réelle. Dans ce chapitre, nous adopterons un point de vue algébrique pour aborder ces nombres. Nous verrons comment définir les nombres complexes à partir du nombre i, comment effectuer les opérations usuelles entre complexes, et comment ces nouvelles règles permettent d'aborder plus largement l'étude des équations.

Partie I Présentation

La définition précise de l'ensemble des nombres complexe $\mathbb{C}$ est hors-programme (même si on essaiera de sentir la construction dans la partie 2 en faisant intervenir le point de vue géométrique), nous nous contenterons d'admettre :

Définition 1 : Ensemble des nombres complexes

On peut construire un **ensemble des nombres complexes**, noté $\mathbb{C}$, contenant $\mathbb{R}$ et vérifiant les propriétés suivantes :

- L'ensemble $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles définies sur $\mathbb{R}$ et qui ont les mêmes propriétés algébriques ;
- L'ensemble $\mathbb{C}$ contient un élément noté i vérifiant $i^2 = -1$;
- Pour tout élément z de l'ensemble $\mathbb{C}$, il existe un unique couple de réel (a, b) tel que

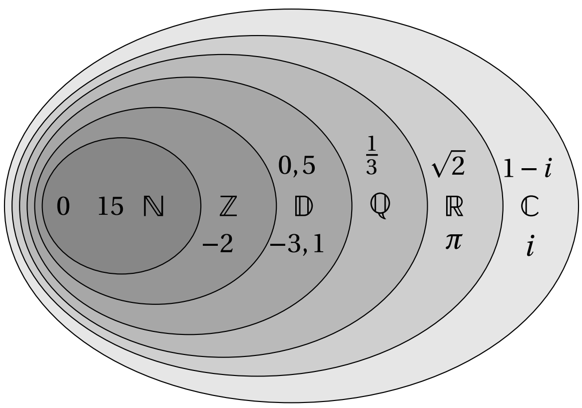
$$z = a + ib$$

On appelle cette écriture la **forme algébrique** du nombre complexe z.

Information :

- Les opérations d'addition et de multiplication sur $\mathbb{C}$ ont les mêmes propriétés algébriques que celle sur $\mathbb{R}$:
  - Commutativité : $a + b = b + a$ et $a \times b = b \times a$
  - Associativité : $(a + b) + c = a + (b + c)$ et $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
  - Élément neutre : $a + 0 = a$ et $a \times 1 = a$
  - Distributivité par rapport à l'addition : $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$
- On notera que le couple de réel $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ où $\mathbb{R}^2$ représente tous les couples de réel, concrètement il représentera le plan.

On peut alors prolonger le diagramme de Venn que vous avez en seconde, en rajoutant l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$:



Attention : Pas de relation d'ordre dans $\mathbb{C}$
Nous n'avons pas de relation dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, en particulier nous ne pourrons pas dire qu'un nombre complexe est positif ou négatif.

Définition 2 : Partie réelle, imaginaire

Si $z = a + ib \in \mathbb{C}$, alors on appelle :

- **partie réelle** de z le nombre réel a, que l'on notera $\text{Re}(z)$,
- **partie imaginaire** de z le nombre réel b, que l'on notera $\text{Im}(z)$,

On peut alors noter : $z = \text{Re}(z) + i\text{Im}(z)$.

Erreur fréquente : La partie imaginaire d'un nombre complexe est un nombre réel

Information :

- Si $\text{Im}(z) = 0$ alors $z = \text{Re}$ et donc $z \in \mathbb{R}$, d'où l'inclusion de $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- Si $\text{Re}(z) = 0$ alors $z = i\text{Im}(z)$ et on dira que z est un **imaginaire pur**. On notera l'ensemble des imaginaires purs $i\mathbb{R} = \{ix \ / \ x \in \mathbb{R}\}$.

Exemple :

- $-1 + 2i$ est nombre complexe ayant comme partie réelle : -1 et comme partie imaginaire 2
- $\dfrac{3i}{2}$ est nombre complexe ayant comme partie réelle : 0 et comme partie imaginaire $\dfrac{3}{2}$.
  On peut alors dire que c'est un ....

À savoir faire 1 : Réel ou imaginaire pur

Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère les nombres complexes $z = x^2 + 2x - 3 + 4ix$ et $z' = x - i(4x^2 - 12x + 9)$. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles :

1. z soit un imaginaire pur. Déterminer z dans ce cas là ;
2. z' soit un réel. Déterminer z' dans ce cas là.

....
....
....
....
....
....
....
....

Propriété 1 : Égalité

- $z = 0 \Leftrightarrow \text{Re}(z) = 0$ et $\text{Im}(z) = 0$
- $z = z' \Leftrightarrow \text{Re}(z) = \text{Re}(z')$ et $\text{Im}(z) = \text{Im}(z')$

À retenir : Un nombre complexe est entièrement caractérisé par la donnée de sa partie réelle et de sa partie imaginaire.

Démonstration :

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

■

À savoir faire 2 : Égalité

En reprenant les nombres complexes z et z' de l'exercice précédent, déterminer les valeurs de x pour lesquelles $z = z'$:

....

....

....

....

....

....

....

....

Partie II Opérations sur les nombres complexes

Propriété 2 : Opérations

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes et k un nombre réel, on a alors :

- $z + z' = (a + a') + i(b + b')$
- $k \times z = ka + i(kb)$
- $z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$

Démonstration :

....

....

....

....

....

■

Exemple :

- $5 - 2i - (i + 4) =$ ....
- $(5 - 2i)(i + 4) =$ ....

À savoir faire 3 : Calculs

1. $i^3 =$ ....
2. $i - (3 + 2i) =$ ....
3. $2(6 - 5i) - 3(4 + i) =$ ....
4. $(5 + 3i)^2 =$ ....
5. $i(5 - i)(i - 1) =$ ....

Propriété 3 :

Soient z et z' deux nombres complexes, on a :

$$\mathrm{Re}(z + z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z') \text{ et } \mathrm{Im}(z + z') = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')$$

Démonstration :

Cela découle directement de la propriété précédente. ■

Erreur fréquente : La partie réelle (resp. imaginaire) d'un produit **n'est pas** le produit des parties réelles (resp. imaginaires).

$$\xcancel{\mathrm{Re}(zz') = \mathrm{Re}(z)\mathrm{Re}(z')}$$

Propriété 4 : Binôme de Newton

Soient u et v deux nombres complexes et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(u + v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{n-k} v^k$$

Information :

- Le nombre $\binom{n}{k}$ s'appelle le coefficient binomiale ***k* parmi *n***
- Vous verrez plus en profondeur la notion de coefficient binomiale dans votre cours de **Combinatoire** en spécialité, mais on retiendra uniquement que c'est le nombre de façon de faire des sous-ensembles à k éléments à partir d'un ensemble à n éléments.
- Pour déterminer un coefficient binomiale on peut utiliser ce que l'on appelle un **triangle de Pascal**.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
$\vdots$	$\vdots$						$\ddots$

Formule de Pascal

$$\binom{3}{1}+\binom{3}{2}=\binom{4}{2}$$

Une ligne s'obtient grâce à la précédente par la formule $\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}$.

À retenir : Une autre formule

Comme $(u+v)^n=(v+u)^n$, on a alors :

$$(u+v)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{n-k}v^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^k v^{n-k}=(v+u)^n$$

Exemple :

- Dans le cas où $n=2$, on retrouve la formule bien connue :

$$(x+y)^2=\sum_{k=1}^{2}\binom{2}{k}x^k y^{2-k}=\binom{2}{0}x^0y^2+\binom{2}{1}x^1y^1+\binom{2}{2}x^2y^0=1\times y^2+2xy+1\times x^2=y^2+2xy+x^2$$

  Ici on vient que les coefficients binomiaux, nous donnent les coefficients dans les identités $(x+y)^n$.

- Pour $n=3$, on a alors :

$$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$

  En plus de prendre les différents coefficients binomiaux sur un ligne (ici la quatrième ligne), on fait varier les puissances des termes. L'un perd en puissance (ici x) pendant que l'autre gagne en puissance (ici y), en allant du maximum (ici 3) pour aller vers le minimum qui est toujours 0 et inversement.

- Déterminer, à l'aide du triangle de Pascal :
  $(x+y)^6=$ ....

Démonstration :

....

....

....

....

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

■

À savoir faire 4 : Puissances de i

1. (a) Calculer les puissances de i jusqu'à i^8.

   ....
   ....

   (b) Que remarquez-vous ? (Indiquez s'il y a un motif qui se repète.)

   ....
   ....

   (c) En déduire une formule ou une méthode permettant de calculer facilement i^n pour tout entier naturel n.

   ....
   ....

2. Déterminer $(1+i)^5$

   ....
   ....

3. Déterminer $(2-3i)^4$

   ....
   ....

Partie III Conjugué et quotient

Définition 3 : Conjugué

Le **conjugué** d'un nombre complexe z est le nombre complexe, noté $\overline{z}$, défini par :

$$\overline{z} = \text{Re}(z) - i\text{Im}(z)$$

Exemple :

- $\overline{1+i} = 1-i$
- $\overline{i} =$..........
- $\overline{7} =$..........

Propriété 5 :

Soient z et z' deux nombres complexes, on a :

- $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$

Démonstration :

....

....

....

....

....

■

À savoir faire 5 : Conjugués

Déterminer le conjugué de chaque nombre complexe suivant (on ne veut pas forcément la forme algébrique) :

1. $3-11i$

   ....

   ....

2. $8i$

   ....

   ....

3. $2i-7$

   ....

   ....

4. $i(9+2i)$

   ....

   ....

Propriété 6 :

Soit z un nombre complexe, on a :

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$
- $z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}(z)$
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z$
- $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = -z$
- $z\overline{z} = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2$

Démonstration :

....

....

....

....

....

....

■

À savoir faire 6 : Équations complexes

Résoudre les équations complexes suivantes :

1. $2\overline{z} + 3i = 1 - \overline{z}$

....

....

....

....

2. $3z - 5 + 4i = -i\overline{z} + 2$

....

....

....

....

....

....

....

....

Propriété 7 : Inverse

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul (dans le cas où $(a, b) \neq (0, 0)$),
Alors z est inversible et l'**inverse** de z est le nombre complexe, que l'on notera z^{-1}, tel que $zz^{-1} = 1$. On a :

$$z^{-1} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{\overline{z}}{a^2 + b^2}$$

On pourra alors noter que $z^{-1} = \dfrac{1}{z}$

Démonstration :

Démontrer que $\dfrac{1}{a+ib} = \dfrac{a-ib}{a^2+b^2}$

....

....

....

....

Démontrer que : $(a+ib)\left(\dfrac{a-ib}{a^2+b^2}\right) = 1$

....

....

....

....

■

Méthode 1 : Méthode de la quantité conjuguée

La **méthode de la quantité conjuguée** a pour but de rationnaliser le dénominateur d'une fraction ayant comme dénominateur un nombre complexe (ou dans d'autre cas une racine carrée). L'idée principale est de faire apparaître la **troisième identité remarquable** au dénominateur, pour cela on va multiplier au numérateur et au dénominateur par la quantité conjuguée de notre dénominateur.

À retenir : Conjugué

On retiendra que, plus généralement, le **conjugué** d'une expression de la forme $a+b$ (où $a, b \in \mathbb{R}$) est $a-b$. C'est la quantité manquante à $a+b$ pour obtenir la troisième identité remarquable :

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Information : On ne retiendra pas la formule donnant l'inverse d'un nombre complexe

En pratique on ne retiendra pas la formule, on utilisera plutôt cette méthode pour obtenir la forme algébrique d'un nombre complexe ayant un dénominateur complexe.

À savoir faire 7 : Obtenir la forme algébrique de l'inverse d'un nombre complexe

Déterminer la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivant :

1. $\dfrac{1}{2+i}$

   ....

   ....

2. $\dfrac{1}{3i-2}$

   ....

   ....

3. $\dfrac{1}{i}$

   ....

   ....

À savoir faire 8 : Le nombre j

On pose $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, après avoir calculé j^2, démontrer les égalités suivantes :

$$1+j+j^2=0 \quad ; \quad j^3=1 \quad ; \quad \frac{1}{j}=j^2=\overline{j}$$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Propriété 8 : Quotient

Soient $z=a+ib$ et $z'=a'+ib'$ deux nombres complexes, avec $z'\neq 0$.
Le **quotient de z par z'** est le nombre complexe, que l'on notera $\frac{z}{z'}$, tel que $\frac{z}{z'}=z\times\frac{1}{z'}$.
On a :

$$\frac{z}{z'}=\frac{(a+ib)(a'+ib')}{a'^2+b'^2}=\frac{z\overline{z'}}{a'^2+b'^2}$$

***Démonstration* :**

Montrer que $\frac{z}{z'}=\frac{z\overline{z'}}{a'^2+b'^2}$

....
....
....
....
....
....

■

Exemple :

- $\frac{1+i}{2i-3}=\frac{(1+i)(-3-2i)}{(2i-3)(-2i-3)}=\frac{-3+2+i(-2-3)}{(-3)^2+2^2}=\frac{-1-5i}{13}=-\frac{1}{13}-\frac{5}{13}i$
- $\frac{5-2i}{i}=$ ....

À savoir faire 9 : Manipuler des expressions quotients complexes

On pose $z_1=-1+i$ et $z_2=2i$
Déterminer la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivant :

1. $\dfrac{1}{z_1}$

....

....

2. $\dfrac{z_1}{z_2}$

....

....

3. $\dfrac{3+z_1}{1-z_2}$

....

....

Propriété 9 :

Soients z et z' deux nombres complexes et n un entier relatif, on a :

- Si $z \neq 0$, alors $\overline{\dfrac{1}{z}} = \dfrac{1}{\overline{z}}$;
- Si $z' \neq 0$ alors $\overline{\dfrac{z}{z'}} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$;
- $\overline{(z^n)} = \left(\overline{z}\right)^n$ (avec $z \neq 0$ si $n < 0$)

***Démonstration* :**

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

■

À savoir faire 10 : Manipuler des conjugués.

Déterminer la forme algébrique du conjugué du nombre complexe $z = \dfrac{(i-3)(4+3i)}{(2i-1)^2}$

....

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Partie IV Exercices

A - Partie réelle, imaginaire

★★⯪☆☆ **EXERCICE 1** (Forme algébrique)

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1. $5-i+6-8i$
2. $\frac{2}{3}i-4+3-\frac{i}{4}$
3. $i-(3+2i)$
4. $-\left(1-\frac{3}{2}i\right)+\left(\frac{i}{2}+2\right)$
5. $2(6-5i)-3(4+i)$
6. $6-2i\sqrt{5}-2+3i\sqrt{5}$
7. $\frac{3\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(-i\frac{7\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
8. $-\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-2i\sqrt{2}\right)-\sqrt{3}\left(i-\sqrt{3}\right)$
9. $\frac{3-i}{2}-\frac{i}{3}(1+i)$
10. $i\sqrt{2}\left(2\sqrt{2}-i\right)+2i\sqrt{3}\left(i-\sqrt{3}\right)$
11. $(1+i)(1+2i)$
12. $i(5-i)(i-1)$

★★☆☆☆ **EXERCICE 2** (Réel ou imaginaire pur)

Pour chacun des nombres complexes suivants, déterminer les valeurs du réel a tels que notre nombre complexe est un réel puis un imaginaire pur.

1. $z_1=a^2+1+2i\left(a^2-3\right)$
2. $z_2=a^2+2a-3+i\frac{a^2+a-2}{2}$

★★★☆☆ **EXERCICE 3** (Fonction #1)

On considère f la fonction définie pour $z\in\mathbb{C}$ par $f(z)=z^2+2z+9$.

1. Notons $z=a+ib$. Exprimer les parties réelles et imaginaires de $f(z)$ en fonction de a et b.
2. Quels sont les nombres complexes dont l'image par f est un réel ?

★★⯪☆☆ **EXERCICE 4** (Condition)

Considérons z un nombre complexe non nul et $Z=1+iz$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que Z soit un réel.

★★☆☆☆ **EXERCICE 5** (Égalité)

1. Dans chacun des deux cas, déterminer les réels x et y vérifiant l'égalité :

   (a) $2x+3+i(y+1)=-5+7i$

   (b) $x^2+1=-iy+2x+3i$

2. Soient a et b deux réels et $z_1=a^2+a+i\left(b^2+1\right)$, $z_2=3a^2-3+2ib$ deux nombres complexes. Déterminer les, éventuelles, valeurs de a et b pour lesquelles z_1 et z_2 sont égaux.

★★⯪☆☆ **EXERCICE 6** (Équation #1)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes, on donnera les solutions sous forme algébrique.

1. $3z-2i+4=i-2z$
2. $3i-2z+1=i(iz+4)-2$
3. $3(z+i)-2z=i+z$
4. $(1+i)z-i=(2i+1)(1+iz)+2$

★★★☆☆ **EXERCICE 7** (Système)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacun des systèmes suivants, d'inconnues z_1 et z_2.

1. $\begin{cases} 2z_1 + 3z_2 = 5 - 3i \\ z_1 - 3z_2 = 4 + 6i \end{cases}$
2. $\begin{cases} 3z_1 + 2z_2 = \dfrac{3}{2} \\ 2z_1 + z_2 = 1 - \dfrac{i}{2} \end{cases}$

B - Calculs dans $\mathbb{C}$

★★☆☆☆ **EXERCICE 8** (Image)

On considère la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par : $f(z) = -iz^2 + 2z - 4i$. Dans chacun des cas, déterminer la forme algébrique :

1. $f(2i)$
2. $f(1-i)$
3. $f(-3)$

★★☆☆☆ **EXERCICE 9** (Identités)

1. Soient a et b deux réels, déterminer :
   - $(a+ib)^2$
   - $(a-ib)^2$
   - $(a+ib)(a-ib)$
2. Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :
   (a) $(3+2i)^2$
   (b) $(2-i)^3$
   (c) $\left(1-i\sqrt{3}\right)^2$
   (d) $\left(\sqrt{2}-i\sqrt{3}\right)\left(i\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$
   (e) $\left(\sqrt{2}+2i\right)^4$
   (f) $\left(2i-\dfrac{1}{2}\right)^4$

★★★⯪☆ **EXERCICE 10** (Binôme de Newton)

1. Développer les expressions suivantes :
   (a) $(1-i)^7$
   (b) $(1+z)^5$, avec $z \in \mathbb{C}$.
   (c) $(1-z)^6$, avec $z \in \mathbb{C}$
2. Montrer que : $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

★★★★★ **EXERCICE 11** (Somme)

On considère la somme S définie par :

$$S = 1 + i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{2025}$$

1. Calculer i^k pour $0 \leq k \leq 6$.
2. Déterminer, selon les valeurs de $n \in \mathbb{N}$, la valeur de i^n.
   Indice : On pourra penser à la division euclidienne de n par un certain entier.
3. Écrire S sous la forme d'une somme.
4. En utilisant la linéarité de la somme, déterminer la valeur de la somme S.

C - Conjugué et quotient

★★☆☆☆ **EXERCICE 12** (Conjugué #1)

Déterminer le conjugué de chaque nombre complexe (on ne demande pas forcément la forme algébrique...).

1. $3-11i$
2. $8i$
3. $-\dfrac{3}{4}$
4. $2i-7$
5. $i(9+2i)$
6. $(3+i)(-13-2i)$
7. $(2+5i)^6$
8. $(1+i)^3(1-2i)^4$
9. $3(1+i)-2i(1-2i)$

★★⯪☆☆ **EXERCICE 13** (Conjugué #2) . . . .

Écrire sous forme algébrique le conjugué de chaque nombre complexe suivants :

1. $(3+i)(-11-2i)$
2. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{i}{2}\right)-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}(2+i)$
3. $\left(\sqrt{2}+i\sqrt{3}\right)\left(-2\sqrt{2}+3i\sqrt{3}\right)$

★★★☆☆ **EXERCICE 14** (Quotient) . . . .

Écrire sous forme algébrique chacun des nombres complexes suivants :

1. $\dfrac{1}{1+2i}$
2. $\dfrac{3}{i-3}$
3. $\dfrac{1}{2-i\sqrt{2}}$
4. $\dfrac{1}{i(i-1)}$
5. $\dfrac{1}{(1+i)^2}$
6. $\dfrac{1+2i}{4-i}$
7. $\dfrac{i-2}{-3i}$
8. $\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$
9. $\dfrac{2}{1+i}-\dfrac{3}{1-i}$

★★★⯪☆ **EXERCICE 15** (Intrus) . . . .

Débusquer l'instrus parmi les nombres suivants :

- $(2+i)^3$
- $8+i$
- $\dfrac{18+26i}{-2+2i}$
- $2-11i$
- $\dfrac{4}{1+i}+\dfrac{9}{i}$

★★★☆☆ **EXERCICE 16** (Mélange) . . . .

Écrire sous forme algébrique chacun des nombres complexes suivants :

1. $\overline{\left(\dfrac{1}{3i-4}\right)}$
2. $\overline{\left(\dfrac{i-3}{5i+2}\right)}$
3. $\overline{\left(\dfrac{i(1-9i)}{(3+7i)^2}\right)}$

★★⯪☆☆ **EXERCICE 17** (Expression) . . . .

On considère les nombres complexes : $z_1=\dfrac{5-2i}{i+4}$ et $z_2=\dfrac{5+2i}{4-i}$.

1. Exprimer z_2 en fonction de z_1.
2. En déduire que z_1+z_2 est un réel et que z_1-z_2 est un imaginaire pur. Puis calculer-les.

★★★☆☆ **EXERCICE 18** (Équation #2) . . . .

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $iz+2-i=0$
2. $(3+5i)z=1-z$
3. $(2i+1)z=1+i-2iz$
4. $(3-i)\overline{z}-1=2i$
5. $2i\left(1-2\overline{z}\right)+\overline{z}=i\overline{z}-1$
6. $\dfrac{1}{z+i}=3+i$
7. $\dfrac{z+1}{z-1}=2i$
8. $\dfrac{z+1}{z-i}=\dfrac{z+2i}{z-1}$
9. $\dfrac{\overline{z}-2i}{\overline{z}-1}+1+i=0$
10. $(2-i)z+(5+2i)\overline{z}=-2+4i$
11. $z=\overline{z}$
12. $\overline{z}=\dfrac{2+i}{2-i}z$

D - Exercices bilan

★★★★☆ **Exercice 19** (Fonction #2) ....

On considère la fonction $f : z \mapsto \dfrac{z-i}{z+i}$, définie sur $\mathbb{C}\backslash\{-i\}$.

1. Exprimer $f(1+2i)$ sous forme algébrique.
2. Montrer que tout complexe $z \neq -i$, $f(z) \neq 1$.
3. Soit Z un complexe différent de 1. Déterminer l'unique antécédent de Z par f.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que $f(x)\overline{f(x)} = 1$.
5. Réciproquement, soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{-i\}$ tel que $f(z)\overline{f(z)} = 1$. Montrer que z est un réel.

★★★★☆ **Exercice 20** (Suites) ....

On considère la suite $(z_n)_n$ définie par $z_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \dfrac{z_n - 6}{1+i}$.

1. Exprimer z_1 et z_2 sous forme algébrique.
2. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = z_n - 6i$
   (a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. Quelle est la nature de la suite $(u_n)_n$?
   (b) En déduire une expression de u_n puis de z_n en fonction de n.
3. On considère la suite $(t_n)_n$ définie par $t_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $t_{n+1} = \dfrac{t_n - 6}{1-i}$
   (a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $t_n = \overline{z_n}$.
   (b) Sans calculs, exprimer t_n en fonction de n pour tout entier naturel n.